به نام پروردگار یکتا

جزوه معادلات دیفرانسیل

استاد اصغر ارژنگ

Scanned by CamScanner

راهنما جزوه :

این جزوه شامل 3 بخش میباشد
که داخل همین فایل قرار گرفته است

بخش اول: معادلات دیفرانسیل

بخش دوم: تبدیلات لاپلاس که در امتحانات معادلات دیفرانسیل حدود 8 نمره دارد

بخش سوم: نمونه سوالات اخیر امتحان معادلات دیفرانسیل + پاسخ توسط استاد ارژنگ

Scanned by CamScanner

معادلات مرتبه اول :

شکل کلی 1) $f(x, y, y')$

حالت خاص 2) $y' = f(x, y)$

شکل دیفرانسیل معادله 3) $p(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$

1) $f(x, y, y') = xyy' + y' + y'^2 + y'^3 = 0$

2) $y' = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

3) $(x + y + \sin x)\,dx + (xy + \cos y)\,dy = 0$

$y = f(x) \longrightarrow y' = \dfrac{dy}{dx} \longleftrightarrow dy = y'\,dx$

« تعریف مشتق » « تعریف دیفرانسیل »

معادلات جدایی پذیر یا تفکیک پذیر :

هرگاه با عملیات ضرب و تقسیم بتوان معادله‌ی مرتبه‌ی اول را به صورت $f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$ تبدیل کرد، آنگاه، معادله را جدایی پذیر گویند :

« $\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy = c$ »

Subject: معادلات جلسه ۱
Date: جمعه

مثال:

① $x^2\,dx + y^2\,dy = 0$

$\longrightarrow \int x^2\,dx + \int y^2\,dy = c$

$\longrightarrow \int x^2\,dx + \int y^2\,dy = c$

$\longrightarrow \boxed{\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{y^3}{3} = c}$ شکل ضمنی جواب ← این جا ما است

$\Rightarrow y^3 = 3c - x^3 \Rightarrow \boxed{y = \sqrt[3]{3c - x^3}}$ شکل صریح جواب

② $x^2(y^2+1)\,dx + e^{-3x}y^2\,dy = 0$

$\xrightarrow{\text{تقسیم } e^{-3x}} \dfrac{x^2(y^2+1)}{e^{-3x}}\,dx + y^2\,dy = 0$

$\xrightarrow{\text{تقسیم } (y^2+1)} \dfrac{x^2}{e^{-3x}}\,dx + \dfrac{y^2}{(y^2+1)}\,dy = 0$

$\longrightarrow x^2e^{3x}\,dx + \dfrac{y^2}{y^2+1}\,dy = 0$ ⟸ جدا پذیر شد حالا

$\Rightarrow \int x^2e^{3x}\,dx + \int \dfrac{y^2}{y^2+1}\,dy = c$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3}x^2e^{3x} - \dfrac{2x}{9}e^{3x} + \dfrac{2}{27}e^{3x} + \int \dfrac{y^2}{y^2+1}\,dy = c$

$\Rightarrow I = \int \dfrac{y^2}{y^2+1}\,dy \Rightarrow \int \dfrac{y^2+1-1}{y^2+1}\,dy \Rightarrow \int \left(1 - \dfrac{1}{(y^2+1)}\right)dy \Rightarrow \boxed{y - \arctan y}$

یادآوری انتگرال جزء به جزء ←

مشتق		انتگرال
x^2	(+)	e^{3x}
$2x$	(−)	$\frac{1}{3}e^{3x}$
2	(+)	$\frac{1}{9}e^{3x}$
0		$\frac{1}{27}e^{3x}$

$\int e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$

$(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$

$(\arctan y)' = \dfrac{1}{1+y^2}$

(+) ادامه بحث در جلسه بعد ادامه می‌شود

Scanned by CamScanner

Subject :: معادلات مرتبه (۱) ::

Date « ۳ صفحه »

③ $(\sin x)\, y^2 dx + (\cos x + 3)\ln y\, dy = 0$

$$\Rightarrow \frac{(\sin x)\, y^2\, dx}{y^2(\cos x + 3)} + \frac{(\cos x + 3)\ln y\, dy}{y^2(\cos x+3)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x + 3}\, dx + \frac{\ln y}{y^2}\, dy = 0$$ ← y ها باید ببرند پشت dy

$$\Rightarrow \int \frac{\sin x}{\cos x + 3}\, dx + \int \frac{1}{y^2} \ln y$$

جزء به جزء ←

$$\int x^n \ln x\, dx$$

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right),\ n \neq -1$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\begin{cases} x^n dx = dv \to v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ \ln x = u \to du = \frac{1}{x}dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int \frac{u'}{u} dx = \ln |u| \\ \int u' u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1},\ n \neq -1 \end{cases}$$ ← یادآوری

ادامه با خودتون

$\Rightarrow \ln(\cos x + 3) +$

معادلات همگن « سؤال هست » ⟸ معادله ی $y' = f(x,y)$ را همگن گویند هرگاه $f(tx,ty) = f(x,y)$ و $t \neq 0$.

« یا جمع توان ها ثابت باشد. »

راه های حس برای همگن بودن معادله ① در اغلب اوقات $f(x,y)$ به صورت یک کسری باشد که در تمام اجزا تشکیل دهنده ی صورت و مخرج آن جمع توان های x و y مقدار ثابت است ② $f(x,y)$ را می توان به صورت تابعی از $\frac{y}{x}$ بیان کرد، بنابراین با تغییر متغیر $\frac{y}{x} = v$ یا $y = vx$ معادله به جدایی پذیر تبدیل می شود.

$$y = vx \longrightarrow y' = v'x + v$$

Subject «معادلات جلسه ۱»

Date «ص 4»

مثال:

$$y' = \frac{x^2y + xy^2}{x^3 + y^3}$$

$f(x,y)$

تقسیم بر بزرگ‌ترین توان مخرج

$\xrightarrow[\text{همگن بودن یا نبودن}]{\text{راهی برای}}$ $f(x,y) = \dfrac{\frac{x^2y}{x^3} + \frac{xy^2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{y^3}{x^3}} = \dfrac{\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3} \xrightarrow{\frac{y}{x} = v} \dfrac{v + v^2}{1 + v^3}$

راه دیگر: $f(tx, ty) = \dfrac{(tx)^2(ty) + (tx)(ty)^2}{(tx)^3 + (ty)^3} = \dfrac{t^3(x^2y + xy^2)}{t^3(x^3 + y^3)} = f(x,y)$

مثال:

۱) همگن: $y' = \dfrac{x^2}{y^2} e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x} \longrightarrow y' = \boxed{\dfrac{1}{v^2} e^{v} + v}$, $v = \dfrac{y}{x}$ ← همگن بود

۲) $y' = \dfrac{x^2(\ln y - \ln x) + y^2}{y^2(\ln y - \ln x) + x^2} \xrightarrow{\div x^2} y' = \dfrac{\ln\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 \ln\left(\frac{y}{x}\right) + 1} = \boxed{\dfrac{\ln v + v^2}{v^2 \ln v + 1}}$ → همگن بود

یادآوری →
$\ln y - \ln x = \ln\frac{y}{x}$
$\ln y + \ln x = \ln xy$
$\ln x^y = y \ln x$

۳) $y' = \dfrac{x^3 - y^3}{xy^2 + y^3} \xrightarrow{\div x^3} y' = \dfrac{1 - v^3}{v^2 + v^3}$, $xy = v$

مثال:

۱) امتحان $y' = \dfrac{x - y}{x + y}$ ⇒ «همگن هست چون جمع توان‌ها یکی است.»

$\frac{y}{x} = v \rightarrow y = vx \rightarrow y' = v'x + v$

$\Rightarrow v'x + v = \dfrac{1 - v}{1 + v} \Rightarrow v'x = \dfrac{1 - v}{1 + v} - v = \dfrac{1 - v - v - v^2}{1 + v} = \dfrac{1 - 2v - v^2}{1 + v}$

$\Rightarrow x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1 - 2v - v^2}{1 + v} \Rightarrow \dfrac{1 + v}{1 - 2v - v^2}\, dv \cdot \dfrac{x}{dx} \Rightarrow \underbrace{\dfrac{1 + v}{1 - 2v - v^2}\, dv = \dfrac{dx}{x}}$

«جداپذیر»

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject «معادلات جلسه ۱»
Date « ورق ۵ »

$$\Longrightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{2(1+v)}{1-2v-v^2}\,dv = \int \frac{dx}{x} + c_1$$

$$\Longrightarrow \int \frac{u'}{u} = \ln|u| \Longrightarrow -\frac{1}{2}\ln|1-2v-v^2| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\Longrightarrow \ln|1-2v-v^2|^{-\frac{1}{2}} = \ln|cx|$$

$$\Longrightarrow |1-2v-v^2|^{-\frac{1}{2}} = |cx| \xrightarrow{\text{به توان } -2} \left(|1-2v-v^2|^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2} = (|cx|)^{-2}$$

$$\Longrightarrow |1-2v-v^2| = \frac{1}{c^2x^2}$$

$$\Longrightarrow 1-2v-v^2 = \underbrace{\pm\frac{1}{c^2}}_{c_1}\cdot\frac{1}{x^2} = \frac{c_1}{x^2}$$

$$\Longrightarrow x^2(1-2v-v^2) = c_1$$

$$\xrightarrow{v=\frac{y}{x}} x^2\left(1-2\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = c_1$$

$$\Longrightarrow \boxed{x^2-2xy-y^2=c_1}$$ جواب نهایی

۲) امتحان $xy' = \dfrac{x^3}{y^2} e^{-\frac{y}{x}} + y \overset{\div x}{\Longrightarrow} y' = \dfrac{x^2}{y^2} e^{-\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$

$\Longrightarrow$ « $y = vx \longrightarrow \dfrac{y}{x} = v \;,\; y' = v'x + v$ »

$\Longrightarrow v'x + \cancel{v} = \dfrac{1}{v^2} e^{-v} + \cancel{v}$

$\Longrightarrow x \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{e^{-v}}{v^2}$

$\Longrightarrow \dfrac{v^2}{e^{-v}} dv = \dfrac{dx}{x} \Longrightarrow v^2 e^{v} dv = \dfrac{dx}{x}$ «جدایی پذیر»

$\Longrightarrow \int v^2 e^{v} dv = \int \dfrac{dx}{x} + \ln|c|$

$\Longrightarrow (v^2 - 2v + 2) e^{v} = \ln|x| + \ln|c|$

$\Longrightarrow (v^2 - 2v + 2) e^{v} = \ln|cx|$

مشتق متوالی		انتگرال
v^2	(+)	e^v
$2v$	(−)	e^v
2	(+)	e^v
0		e^v

$\overset{v = \frac{y}{x}}{\Longrightarrow} \left(\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - 2\left(\dfrac{y}{x}\right) + 2 \right) e^{\frac{y}{x}} = \ln|cx|$

جواب

۳) امتحان $y' = \dfrac{y^3(\ln y - \ln x)}{xy^2(\ln y - \ln x) - x^3} \Longrightarrow$

$\overset{\div x^3}{\Longrightarrow} \dfrac{\frac{y^3}{x^3}(\ln \frac{y}{x})}{\frac{xy^2}{x^3}(\ln(\frac{y}{x})) - \frac{x^3}{x^3}} = \dfrac{(\frac{y}{x})^3 \ln(y/x)}{(\frac{y}{x})^2 \ln(\frac{y}{x}) - 1} \Longrightarrow \dfrac{y}{x} = v$ یا $y = vx \;,\; y' = v'x + v$

$\Longrightarrow \underbrace{v'x}_{x\frac{dv}{dx}} + v = \dfrac{v^3 \ln v}{v^2 \ln v - 1} \Longrightarrow x \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{v^3 \ln v}{v^2 \ln v - 1} - v \Longrightarrow$

Scanned by CamScanner

Subject: معادلات جلسه ۱

Date: 7

$$\Rightarrow \frac{v^3 \ln v - v^3 \ln v + v}{v^2 \ln v - 1} = \frac{v}{v^2 \ln v - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{v^2 \ln v - 1}{v} \, dv = \frac{dx}{x}$$ جدایی پذیر

$$\Rightarrow \int \frac{v^2 \ln v - 1}{v} \, dv - \int \frac{1}{v} \, dv = \int \frac{dx}{x} + \ln|c|$$

$$\Rightarrow \int v \ln v \, dv - \ln|v| = \ln|x| + \ln|c|$$

جزء به جزء

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} \left(\ln v - \frac{1}{2} \right) - \ln|v| = \ln|cx|$$

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^2 \left(\ln\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2} \right) - \ln\left|\frac{y}{x}\right| = \ln|cx|$$ ← جواب نهایی

4) مثال → $y' = \frac{x}{y} \tan^2\left(\frac{y^2}{x^2}\right) + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} = v \to y = vx \to y' = v'x + v$

$$\Rightarrow \frac{1}{v} \tan^2 v^2 + \frac{1}{v} + v = v'x + v$$

$$\Rightarrow v'x = \frac{1}{v} \tan^2 v^2 + \frac{1}{v} + v - v \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{1}{v} \tan^2 v^2 + \frac{1}{v}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{v} \tan^2 v^2 \, dv + \int \frac{1}{v} \, dv = \int \frac{dx}{x} + \ln|c| \Rightarrow$$

یادآوری:

$1 + \tan^2 u = \sec^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}$

$u = v^2 \to du = 2v \, dv$

$v \, dv = \frac{1}{2} du$

$\cos^2 u = \frac{1 + \cos(2u)}{2}$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{v} (\sec^2(v^2)) = \frac{1}{v \cos^2(v^2)} \Rightarrow v \cos^2(v^2) \, dv = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int v \cos^2(\underbrace{v^2}_{u}) \, d\underbrace{v}_{u} = \int \frac{dx}{x} + \ln|c|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int \cos^2 u \, du = \ln|cx| \Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{1 + \cos(2u)}{2} \, du = \ln|cx|$$

$\Rightarrow \frac{1}{۲}\left\{\frac{1}{۲}u+\frac{1}{۴}\sin(۲u)\right\}=\ln|cx|$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{۲}\left\{\frac{1}{۲}v^{۲}+\frac{1}{۴}\sin(۲v^{۲})\right\}=\ln|cx|}$ ← جواب نهایی

تمرین:

1) $y'=\frac{x^{۲}y-xy^{۲}}{x^{۳}+y^{۳}}$ ← امتحا

2) $y'=\frac{y^{۴}-x^{۴}}{y^{۴}-۴xy^{۳}}$ ← امتحا

3) $(x+\sqrt{xy})y'-y=0$ ← امتحا

4) $y'=\frac{y(\ln y-\ln x)}{x(\ln y-\ln x)+y}$ ← امتحا

5) $y'=\frac{y(\ln y-\ln x)+x}{x(\ln y-\ln x)}$ ← امتحا

6) $y'=\frac{xy}{x^{۲}\pm y^{۲}}$ ← امتحا

7) $y'=\frac{x^{۲}\pm y^{۲}}{xy}$ ← امتحا

PAPCO

Scanned by CamScanner

«معادلات جدایی‌پذیر قابل تبدیل به همگن»

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

حالت خاص $\longrightarrow$ $y' = \dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$ «همگن $c_1, c_2 = 0$»

یا به‌صورت دیفرانسیل ↓

$$(a_1x + b_1y + c_1)\,dx + (a_2x + b_2y + c_2)\,dy = 0$$

۲ خط با معادلات $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ و $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ در صفحه ۳ حالت دارند:

① اگر $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ باشد ۲ خط متقاطع هستند.

② اگر $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ باشد آنگاه ۲ خط موازی هستند.

③ اگر $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ باشد آنگاه ۲ خط منطبق برهم اند.

نکته: اگر ۲ خط موازی یا منطبق برهم باشند آنگاه با تغییر متغیر $u = a_1x + b_1y$ معادله به جدایی‌پذیر تبدیل می‌شود.»

نکته: اگر ۲ خط متقاطع باشند آنگاه با حل دستگاه زیر نقطه‌ی تقاطع را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

$(x = \alpha\ ,\ y = \beta)$ «جواب» $\Longrightarrow \begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} dx = dX \\ dy = dY \end{cases}$

آنگاه $\longrightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = a_1X + b_1Y \\ a_2x + b_2y + c_2 = a_2X + b_2Y \end{cases}$ معادله جدید $y' = \dfrac{dY}{dX} = \boxed{\dfrac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}}$ «همگن»

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject «معادلات جبر ۱»
Date «جلسه ۱۰»

مثال =

1) $y' = \frac{x-y-1}{x+y-5}$ ⟹ متقاطع ← $\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1}$

$-5\begin{cases} x-y-1=0 \\ x+y-5=0 \end{cases} \to \begin{cases} -5x+5y+5=0 \\ x+y-5=0 \end{cases} \to \begin{cases} -5x+5y=0 \\ -5x-5y=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=\alpha=3 \\ y=\beta=2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = X+\alpha = X+3 \\ y = Y+\beta = Y+2 \end{cases} \to \begin{cases} dx = dX \\ dy = dY \end{cases} \to \begin{array}{l} x-y-1 = (X+3)-(Y+2)-1 = X-Y \\ x+y-5 = (X+3)+(Y+2)-5 = X+Y \end{array}$

$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{X-Y}{X+Y}$ «همگن»

جواب از حل معادله همگن ⟸

$X^2 - 2XY - Y^2 = c$ ⟹ (جای X و Y گذاریم) $(x-3)^2 - 2(x-3)(y-2) - (y-2)^2 = c$ جواب نهایی

نکته =

دیفرانسیل تابع تک متغیره
$d(f(x)) = f'(x)\,dx$

دیفرانسیل تابع دو متغیره
$df(x,y) = f_x\,dx + f_y\,dy$

«$d(f \pm g) = df \pm dg$»

Scanned by CamScanner

Subject «معادلات جلسه ۱»

Date «۱۹ مهر»

2) $((2x) + 3y + 4)\,dx + (4x + 6y + 5)\,dy = 0 \Rightarrow$

$\to (2x + 3y + 4)\,dx = -(4x + 6y + 5)\,dy$

$\to y' = \dfrac{dy}{dx} = \ominus \dfrac{②x + ③y + 4}{4x + 6y + 5} \to$ [۲ خط موازی اند] $\to$ چون « $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{4}{5}$ »

« $u = 2x + 3y$ » $\Longrightarrow du = d(2x + 3y)$

$\Longrightarrow d(2x) + d(3y) \Rightarrow 2dx + 3dy = du$

به دلخواه ابتدا dy یا dx را بدست می آوریم $\Longrightarrow dy = \dfrac{du - 2dx}{3}$; $4x + 6y + 5 = 2(2x + 3y) + 5 = 2u + 5$

$\Longrightarrow \left((u + 4)\,dx + (2u + 5)\left(\dfrac{du - 2dx}{3}\right) = 0\right) \times 3$

$\Longrightarrow (3u + 12)\,dx + (2u + 5)(du - 2dx) = 0$

$\Longrightarrow (3u + 12 - 4u - 10)\,dx \quad (2u + 5)\,du = 0$

$\Longrightarrow (2 - u)\,dx + (2u + 5)\,du = 0$

$\Longrightarrow dx + \dfrac{2u + 5}{2 - u}\,du = 0$ [جدایی پذیر]

$\Longrightarrow \int dx + \int \dfrac{2u + 5}{(2 - u)_v}\,du = c$

$\Longrightarrow I = \int \dfrac{2u + 5}{2 - u}\,du, \quad 2 - u = v \to \boxed{u = 2 - v}, \ \boxed{du = -dv}$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject «معادلات جلسه ۹»

Date «12 مهر»

$$\Rightarrow I = \int \frac{۲(۲-V)+۵}{V} \, (-dV)$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{۲V-۹}{V} \, dV \Rightarrow \int \left(۲ - \frac{۹}{V}\right) dV = ۲V - ۹\ln|V|$$

$$\Rightarrow \boxed{۲(۲-u) - ۹\ln|۲-u|}$$

«جواب نهایی»

Subject «[redacted]»
Date «[redacted]»

[redacted]

2) $((2x)+3y+4)\,dx+(4x+6y+5)\,dy=0$ ⇒

$\longrightarrow (2x+3y+4)\,dx=-(4x+6y+5)\,dy$

$\longrightarrow y'=\dfrac{dy}{dx}=\ominus\,\dfrac{(2)x+(3)y+(4)}{(4)x+(6)y+(5)}\rightarrow$ [۲ خط موازی‌اند] $\longrightarrow$ چون «$\frac{2}{4}=\frac{3}{6}\neq\frac{4}{5}$»

«$u=2x+3y$» $\Longrightarrow du=d(2x+3y)$

$\Longrightarrow d(2x)+d(3y)\Rightarrow 2dx+3dy=du$

به دلخواه ابتدا dx یا dy را بدست می‌آوریم $\Longrightarrow dy=\dfrac{du-2dx}{3}\xrightarrow{dy}$ «$4x+6y+5=2(2x+3y)+5=2u+5$»

$\Longrightarrow \left((u+4)\,dx+(2u+5)\left(\dfrac{du-2dx}{3}\right)=0\right)\times 3$

$\Rightarrow (3u+12)\,dx+(2u+5)(du-2dx)=0$

$\Longrightarrow (3u+12-4u-10)\,dx\quad(2u+5)\,du=0$

$\Rightarrow (2-u)\,dx+(2u+5)\,du=0$

$\Rightarrow dx+\dfrac{2u+5}{2-u}\,du=0$ [جدایی‌پذیر]

$\Rightarrow \int dx+\int\dfrac{2u+5}{(2-u)\,v}\,du=c$

$\Rightarrow I=\int\dfrac{2u+5}{2-u}\,du\,,\quad 2-u=v\rightarrow$ [$u=2-v$] ; [$du=-dv$]

Scanned by CamScanner

Subject «معادلات جلسه 2»

Date «صفحه ۱»

معادلات کامل:

دیفرانسیل تابع دو متغیره: $df = f_x dx + f_y dy$ و f تابعی از x و y است

f_x مشتق جزئی f نسبت به x است یعنی از f نسبت به x مشتق می‌گیریم با فرض اینکه y ثابت باشد

$(e^u)' = u'e^u$ و $(\sin u)' = u'\cos u$ ← یادآوری

مثال $\Rightarrow f = e^{x^2y^3} + \sin(x^3+y^4)$:

① $f_x = 2xy^3 e^{x^2y^3} + (3x^2+0)\cos(x^3+y^4)$

② $f_y = 3x^2y^2 e^{x^2y^3} + (0+4y^3)\cos(x^3+y^4)$

~~$\Rightarrow f = \ln(x^3+y^5) + \arctan(x^2y^3)$~~

مثال $\Rightarrow f = \ln(x^3+y^5) + \arctan(x^2y^3)$:

① $f_x = \dfrac{3x^2+0}{x^3+y^5} + \dfrac{2xy^3}{1+(x^2+y^3)^2}$ و ② $f_y = \dfrac{0+5y^4}{x^3+y^5} + \dfrac{3x^2y^2}{1+(x^2y^3)^2}$

Scanned by CamScanner

Subject «معادلات جلسه ۲»
Date «رفع»

معادلات کامل: معادله‌ی $pdx + Q\,dy = 0$ را کامل گوییم هرگاه تابعی مانند f موجود باشد

به طوری‌که $df = pdx + Q\,dy$ به عبارتی دیگر:
$$\begin{cases} f_x = p \\ f_y = Q \end{cases}$$

شرط کامل بودن معادله: « $\Delta = Q_x - P_y = 0$ یا $Q_x = P_y$ »

جواب $df = 0 \longrightarrow f = c$

روش تعیین f: انتگرال‌های $\int p\,dx$ و $\int Q\,dy$ را محاسبه می‌کنیم و با هم جمع می‌کنیم. در موقع جمع کردن از عبارت‌های مشترک فقط یکی را می‌نویسیم.

مثال: $(2xy + y^3 + 1)\,dx + (x^2 + 3xy^2 + 1)\,dy = 0$

$P = 2xy + y^3 + 1$ ، $Q = x^2 + 3xy^2 + 1$

معادله کامل است ⇐ $\rightarrow \Delta = Q_x - P_y = (2x + 3y^2 + 0) - (2x + 3y^2 + 0)\,dy$

$f_x = P = 2xy + y^3 + 1$

$f_y = Q = x^2 + 3xy^2 + 1$

$$\begin{cases} \int (2xy + y^3 + 1)\,dx = x^2y + xy^3 + x \\ \int (x^2 + 3xy^2 + 1)\,dy = x^2y + xy^3 + y \end{cases} + \longrightarrow \boxed{f = x^2y + xy^3 + x + y = c}$$ جواب

Subject: معادلات حل ۲ «
Date: « فصل ۳ »

مثال => $y' = \frac{x-y-1}{x+y-5}$ => $\frac{dx}{dy} = \frac{x-y-1}{x+y-5}$ => $(x-y-1)dx = (x+y-5)dy$

(نسبت y مشتق) (مشتق نسبت به x)

$\Longrightarrow \underbrace{(-x+y+1)}_{P}dx + \underbrace{(x+y-5)}_{Q}dy$

تشخیص کامل بودن معادله = { ازمشتق dx نسبت به y مشتق ، ازمشتق dy نسبت به x مشتق ، و در آخر $Q_x - P_y$ باید ۰ یا برابر ۰ }

$\Longrightarrow (0+1+0)dx + (1+0-0)$

$\Longrightarrow Q_x - P_y \Rightarrow 1-1=0$ معادله کامل است

$\Longrightarrow \begin{cases} \int(-x+y+1)\,dx = -\frac{x^2}{2} + xy + x \\ \int(x+y-5)\,dy = xy + \frac{y^2}{2} - 5y \end{cases} \oplus$

$\Longrightarrow f = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + xy + x - 5y = c$

ضرب در ۲ $\longrightarrow$ $-x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 10y = 2c = c_1$

مثال = $(\underbrace{y\cos x + \cos y + 2x}_{P})\,dx + (\underbrace{\sin x - x\sin y + 2y}_{Q})\,dy = 0$ $\qquad \Delta = Q_x - P_y$

$P'_y = \cos x - \sin y \Rightarrow$

$Q'_x = \cos x + \sin y + 0 \Rightarrow$

$\Longrightarrow ((\cos x + \sin y)) - ((\cos x - \sin y)) = 0$ معادله کامل است ✓

$\rightarrow \begin{cases} \int(y\cos x + \cos y + 2x)\,dx = y\sin x + x\cos y + x^2 \\ + \\ \int(\sin x - x\sin y + 2y)\,dy = y\sin x + x\cos y + y^2 \end{cases} \oplus \Longrightarrow f = y\sin x + x\cos y + x^2 + y^2 = c$ = جواب

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject «معادلات جلسه ۲»

Date «۷ اسفند»

مثال: $\left(\ln y + \frac{y}{x} + 3ye^{3xy}\right)dx + \left(\ln x + \frac{x}{y} + 3xe^{3xy}\right)dy = 0 \quad , x>0 , y>0$

$\Delta = Q_x - P_y \Rightarrow \left(\frac{1}{y} + \frac{x-0}{x^2} + 9yx e^{3xy}\right) - \left(\frac{1}{x} + \frac{y-0}{y^2} + 9x^2y e^{3xy}\right)$

$\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x} + 9yx e^{3xy}\right) - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 9xy e^{3xy}\right) = 0$

معادله کامل است ✓

$① \int \left(\ln y + \frac{y}{x} + 3ye^{3xy}\right)dx \Rightarrow$

$② \int \left(\ln x + \frac{x}{y} + 3xe^{3xy}\right)dy \Rightarrow$

یادآوری:

$\int e^{Ax}dx = \frac{1}{A}e^{Ax}$

$(e^{Ax})' = Ae^{Ax}$

$①+② \longrightarrow f = x\ln y + y\ln x + e^{3xy} = c \quad , x>0 , y>0$

عامل انتگرال ساز ⇐ هرگاه معادله $P\,dx + Q\,dy = 0$ ، $\Delta \neq 0$ باشد، آنگاه معادله‌ی کامل نیست؛ در چنین حالتی تابعی مانند μ ممکن است موجود باشد

که معادله $\mu\{P\,dx + Q\,dy\} = 0$ کامل باشد به μ عامل انتگرال ساز گویند؛

روش تعیین μ ⇐ فرض کنید $z = g(x,y)$ تابعی دلخواه از x و y باشد، آنگاه:

$$\mu = e^{\int \frac{\Delta}{P z_y - Q z_x} dz}$$

نکته مهم: μ از فرمول فوق زمانی قابل محاسبه است که «$\frac{\Delta}{P z_y - Q z_x}$» تابعی از z باشد، در غیر این صورت

تابع دلخواه $z = g(x,y)$ را عوض می‌کنیم.»

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject «معادلات – جلسه ۲»
Date «5 مهر»

مثلاً → $z = x^2 + y^2 \Rightarrow \dfrac{\Delta}{Pz_y - Qz_x} = \dfrac{x^2 + y^2}{(x^2+y^2)^2 + 4} = \dfrac{z}{z^2+4}$

برای سادگی محاسبات →

1) $z = x$ ✓ اصلی‌تر
2) $z = y$ ✓ اصلی‌تر
3) $z = xy$
4) $z = x \pm y$
5) $z = x^2 \pm y^2$

مگر این که طراح سئوال عامل انتگرال ساز را بدهد که در این صورت در فرمول جای‌گذاری می‌کنیم.»

1) $z = x \rightarrow \begin{cases} z_x = 1 \\ z_y = 0 \end{cases} \rightarrow \dfrac{\Delta}{Pz_y - Qz_x} = \dfrac{\Delta}{-Q}$

• اگر $\frac{\Delta}{-Q}$ تابعی از x به تنهایی باشد «$\mu = e^{\int \frac{\Delta}{-Q} dx}$»

2) $z = y \rightarrow \begin{cases} z_x = 0 \\ z_y = 1 \end{cases} \rightarrow \dfrac{\Delta}{Pz_y - Qz_x} = \dfrac{\Delta}{P}$

• اگر $\frac{\Delta}{P}$ تابعی از y به تنهایی باشد. «$\mu = e^{\int \frac{\Delta}{P} dy}$»

3) $z = xy \rightarrow \begin{cases} z_x = y \\ z_y = x \end{cases} \rightarrow \dfrac{\Delta}{Pz_y - Qz_x} = \dfrac{\Delta}{xP - yQ}$

• اگر $\frac{\Delta}{xP - yQ}$ تابعی از $z = xy$ به تنهایی باشد. «$\mu = e^{\int \frac{\Delta}{xP - yQ} dz}$»

4) $z = x + y \rightarrow \begin{cases} z_x = 1 \\ z_y = 1 \end{cases} \rightarrow \dfrac{\Delta}{Pz_y - Qz_x} = \dfrac{\Delta}{P - Q}$

• اگر $\frac{\Delta}{P-Q}$ تابعی از $z = x + y$ به تنهایی باشد. «$\mu = e^{\int \frac{\Delta}{P-Q} dz}$»

عامل انتگرال‌ساز: با معادلات کامل ۳ تا ۴ بدرد می‌آید.»

Subject « معادلات جلسه ۲ »
Date « ص ۶ »

مثال: عامل انتگرال ساز عامل زیر را پیدا کرده و آن را حل کنید:

① $\underbrace{(x^3\ln x - 2y^3)}_{P}\,dx + \underbrace{3xy^2}_{Q}\,dy = 0$

یادآوری → $e^{\ln x} = x$

$e^{\alpha \ln x} = e^{\ln x^{\alpha}} = x^{\alpha}$

$\Delta = Q_x - P_y \rightarrow \Delta = (3y^2) - (-6y^2) = 9y^2 \rightarrow \frac{\Delta}{-Q} = \frac{9y^2}{-3xy^2} = \frac{-3}{x}$

توضیح ⟵ { باید حاصل را یک بار تقسیم بر Q کرد و جواب باید برحسب x باشد.

یک بار هم به P تقسیم کرد و باید جواب برحسب y باشد. میشود از این طریق

عامل انتگرال ساز بدست می آید...}

$\Rightarrow \mu = e^{\int -\frac{3}{x}dx} = e^{-3\ln|x|} = e^{\ln|x|^{-3}} = |x|^{-3} \xRightarrow{\text{مثبت}} x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ جواب

$\Rightarrow x^{-3}\{\text{معادله}\} = 0 \rightarrow x^{-3}\{(x^3\ln x - 2y^3)dx + 3xy^2dy\} = 0$

$\Rightarrow (\ln x - 2x^{-3}y^3)dx + 3x^{-2}y^2 dy = 0$ معادله کامل ✓

$\Rightarrow \int x^n \ln x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right), \quad n \neq -1$

$\Rightarrow \int \ln x\, dx = x(\ln x - 1)$

② $\underbrace{(y + 2xe^{y-x})}_{P}\,dx + \underbrace{(1 + x^2e^{y-x})}_{Q}\,dy = 0$

$\Delta = Q_x - P_y \Rightarrow \Delta = (2xe^{y-x}) - (x^2e^{y-x}) - (1 + 2xe^{y-x}) = -x^2e^{y-x} - 1 = -Q$

$\frac{\Delta}{-Q} = \frac{-Q}{-Q} = 1 \rightarrow \mu = e^{\int 1 dx} = e^x$

$e^x\{\text{معادله}\} = 0 \rightarrow e^x\{(y + 2xe^{y-x})dx + (1 + x^2e^{y-x})dy\} = 0$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject «معادلات حل ۲»
Date «صـ ۷»

معادله کامل ⟶ $(ye^{x} + 2xe^{y})\,dx + (e^{x} + x^{2}e^{y})\,dy = 0$

$\Rightarrow \boxed{f = ye^{x} + x^{2}e^{y} = c}$

③ $(2\cos x(x + e^{y}) + \sin x)\,dx + e^{y}\sin x\,dy = 0$
(Q زیر پرانتز اول، P زیر جمله دوم)

$\Delta = Q_x - P_y \Rightarrow \Delta = (2\cos x\, e^{y}) = -e^{y}\cos x$

$\Rightarrow -\dfrac{\Delta}{Q} = \dfrac{-e^{y}\cos x}{-e^{y}\sin x} = \boxed{\dfrac{\cos x}{\sin x}}$

$\Rightarrow \mu = e^{\int \frac{\cos x}{\sin x}dx} = e^{\ln|\sin x|}$ «ساده شدن» $= |\sin x| \overset{\text{مثبت}}{=} \sin x$

$\Rightarrow \sin x \{\text{معادله}\} = 0 \longrightarrow (2\sin x\cos x(x + e^{y}) + \sin^{2}x)\,dx + e^{y}\sin^{2}x\,dy = 0$ معادله کامل

$\rightarrow ((x + e^{y})\sin^{2}x)'$ ($f = x + e^{y}$, $g = \sin^{2}x$) $(fg)'$

$$\begin{cases} ① \int (2\cos x(x + e^{y}) + \sin x)\,dx = \\ ⊕ \\ ② \int (e^{y}\sin x)\,dy = \end{cases}$$

یادآوری: ابتدا انتگرال نسبت به x و انتگرال دوم را نسبت به y می‌گیریم و بعد با هم جمع و اشتراک‌ها را حذف می‌کنیم

$1 \oplus 2 \Rightarrow f = (x + e^{y})\sin^{2}x = c$

یادآوری: $(fg)' = f'g + g'f$

Scanned by CamScanner

مثال: عامل انتگرال‌ساز را پیدا و آن را حل کنید:

$$① \underbrace{(2x+3x^2y)}_{P}dx+\underbrace{(3x^2y^{-1}+4x^3+2y^{-2})}_{Q}dy=0$$

$$\Delta = Q_x - P_y \Rightarrow \Delta = (3x^2)-(6xy^{-1}+12x^2-4y) \Rightarrow$$

$$\Delta = Q_x - P_y \Rightarrow \Delta = 6xy^{-1}+12x^2-3x^2 = \boxed{6xy^{-1}+9x^2}$$

$$\Rightarrow 6xy^{-1}+9x^2\,\frac{y^{-1}}{y^{-1}} \longrightarrow \underset{\text{فاکتور}}{3y^{-1}}(2x+3x^2y)=3y^{-1}P$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta}{P}=\frac{3y^{-1}P}{P}=3y^{-1}=\boxed{\frac{3}{y}} \Rightarrow \mu = e^{\int \frac{3}{y}dy}=y^3$$

$$\Rightarrow y^3\{(2x+3x^2y)dx+(3x^2y^{-1}+4x^3+2y^{-2})dy\}=0$$

$$\Rightarrow f = \boxed{(x,y)=x^2y^3+x^3y^4+y^3=c}$$

$$② \underbrace{\left(e^{-y}+\frac{2x}{y}\right)}_{P}dx+\underbrace{\frac{x}{y}\left(e^{-y}+x\right)}_{Q}dy=0$$

$$\Delta = Q_x - P_y = \frac{e^{-y}}{y}+\frac{2x}{y}-\left(-e^{-y}-\frac{2x}{y^2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{e^{-y}}{y}+e^{-y}\right)+\left(\frac{2x}{y}+\frac{2x}{y^2}\right)=e^{-y}\left(\frac{1}{y}+1\right)+\frac{2x}{y}\left(1+\frac{1}{y}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{y}\right)\underbrace{\left(e^{-y}+\frac{2x}{y}\right)}=\left(1+\frac{1}{y}\right)P \longrightarrow \frac{\Delta}{P}=\frac{(1+\frac{1}{y})P}{P}=1+\frac{1}{y}$$

$$\mu = e^{\int(1+\frac{1}{y})dy}=e^{y+\ln|y|}\longrightarrow e^{y}\cdot e^{\ln|y|}=|y|e^{y}\overset{\text{مثبت}}{=}\boxed{ye^{y}}$$

$$\longrightarrow ye^{y}\{\text{معادله}\}=0 \Rightarrow (y+2xe^{y})dx+(x+x^2e^{y})dy=0$$

$$\boxed{f = xy+x^2e^{y}=c \longrightarrow \text{جواب}}$$

Subject «معادلات حلبه ۲»

Date «ص ۹»

---

(۱۴) $\left(\frac{\ln y}{x} + y\ln y\right)dx + \left(\frac{2}{y}\ln x + 2x + x\ln y\right)dy = 0$

$\underbrace{\frac{\ln y}{x} + y\ln y}_{P}$, $\underbrace{\frac{2}{y}\ln x + 2x + x\ln y}_{Q}$

$\Delta = Q_x - P_y \longrightarrow \Delta = \left(\frac{2}{xy} + 2 + \ln y\right) - \left(\frac{1}{xy} + \ln y + 1\right)$

$\left\{ P \to \ln y\left(\frac{1}{x} + y\right) \right\}$ (فاکتور)

$\Longrightarrow \frac{\Delta}{P} = \frac{\frac{1}{y}\left(\frac{1}{x} + y\right)}{\ln y\left(\frac{1}{x} + y\right)} = \frac{\frac{1}{y}}{\ln y} \longrightarrow \mu = e^{\int \frac{\frac{1}{y}}{\ln y} dy} = e^{\ln|\ln y|} = |\ln y| = \ln y$

عامل انتگرال ساز به صورت $M = x^{\alpha} y^{\beta}$

ممکن است عامل انتگرال ساز معادله به صورت $M = x^{\alpha} y^{\beta}$ باشد در چنین حالتی $x^{\alpha} y^{\beta}$ را در طرفین معادله ضرب و شرط کامل بودن را برای معادله جدید بررسی می‌کنیم و α ، β را به دست می‌آوریم

$(M = Q_x, x = 0)$

مثال: عامل انتگرال ساز معادله زیر را به دست آورید و آن را حل کنید.

$$(xy^3 + 4y)\,dx + (x^2y^2 + 6x)\,dy = 0$$

$$M = x^{\alpha} y^{\beta} \to x^{\alpha} y^{\beta} \left[(xy^3 + 4y)\,dx + (x^2y^2 + 6x)\,dy \right] = 0$$

$$\to (x^{\alpha+1} y^{\beta+3} + 4x^{\alpha} y^{\beta+1})\,dx + (x^{\alpha+2} y^{\beta+2} + 6x^{\alpha+1} y^{\beta})\,dy = 0$$

P جدید — Q جدید

شرط کامل بودن $\to$ $Q_x = P_y$

$$(\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta+2} + 6(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta} = (\beta+3)x^{\alpha+1}y^{\beta+2} + 4(\beta+1)x^{\alpha}y^{\beta}$$

$\alpha + 2 = \beta + 3$ $\to$ $\alpha = -3$, $\beta = -4$ $\qquad M = x^{-3}y^{-4}$ ✓

$6(\alpha+1) = 4(\beta+1)$

در معادله ضرب کرده‌ایم $\to$ $\alpha = -3$, $\beta = -4$

تا معادله کامل شود $\quad (x^{-2}y^{-1} + 4x^{-3}y^{-3})\,dx + (x^{-1}y^{-2} + 6x^{-2}y^{-4})\,dy = 0$

انتگرال نسبت به x + انتگرال نسبت به y $\to$ $f = x^{-1}y^{-1} - 2x^{-2}y^{-3} = c$ ✓

$$(x^4y^2 - y)\,dx + (x^2y^4 - x)\,dy = 0$$

$$M = x^{\alpha}y^{\beta} \rightarrow x^{\alpha}y^{\beta}\{(x^4y^2 - y)\,dx + (x^2y^4 - x)\,dy\} = 0$$

$$\star\ (\underbrace{x^{\alpha+4}y^{\beta+2} - x^{\alpha}y^{\beta+1}}_{P})\,dx + (\underbrace{x^{\alpha+2}y^{\beta+4} - x^{\alpha+1}y^{\beta}}_{Q})\,dy = 0$$

$$Q_x = P_y \Rightarrow \Delta = 0 \rightarrow (\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta+4} - (\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta} = (\beta+2)x^{\alpha+4}y^{\beta+1} - (\beta+1)x^{\alpha}y^{\beta}$$

$$-(\alpha+1) = -(\beta+1)$$

[illegible] $\alpha + 2 = 0 \rightarrow \alpha = -2 \rightarrow M = x^{-2}y^{-2} = \dfrac{1}{x^2y^2}$

$\beta + 2 = 0 \rightarrow \beta = -2$

[illegible] $\star \rightarrow \begin{matrix}\alpha = -2\\ \beta = -2\end{matrix} \Rightarrow (x^2 - x^{-2}y^{-1})\,dx + (y^2 - x^{-1}y^{-2})\,dy = 0 \rightarrow$ [illegible]

$$f = \frac{x^3}{3} + x^{-1}y^{-1} + \frac{y^3}{3} = c \ \checkmark \quad \Rightarrow \quad x^3 + 3x^{-1}y^{-1} + y^3 = 3c = c_1$$

(۲) بدون یافتن α, β را یافت ↓

$$\Delta = Q_x - P_y \Rightarrow 2xy^4 - 1 - (2x^4y - 1) = 2xy^4 - 2x^4y = 2xy(y^3 - x^3)$$

$$z = xy,\ \frac{\Delta}{xP - yQ} = \frac{2xy(y^3 - x^3)}{x(x^4y^2 - y) - y(x^2y^4 - x)} = \frac{2xy(y^3 - x^3)}{x^2y^2(x^3 - y^3)} = \frac{-2}{xy} = \frac{-2}{z}$$

$$M = e^{\int \frac{-2}{z}dz} = z^{-2} = (xy)^{-2} = x^{-2}y^{-2} \ \checkmark$$

تمرین

$(x^2 - x^2y^2)\,dx + (x^3y + 2x^2 + xy)\,dy = 0 \rightarrow \{M = x^{-2}y^{-3},\ f = x^{-1}y^{-1} + xy^{-1} + y^{-2} = c\}$

$(3y^2 + 4xy)\,dx + (3x^2 + 4xy)\,dy = 0 \rightarrow \{M = x^2y^2,\ f = x^3y^3 + x^4y^3 = c\}$

$(y + \frac{y^2}{5x})\,dx + (2x + y)\,dy = 0 \rightarrow \{M = xy^3,\ f = \frac{1}{2}x^2y^4 + \frac{1}{5}xy^5 = c\}$

Scanned by CamScanner

Subject «معادلات خطی ۳»
Date «۳ دی»

معادله خطی مرتبه‌ی اول =

$$y' + P(x)y = \begin{cases} q(x) & \text{مرتبه } 1 \\ y^n q(x) & \text{برنولی} \\ y^2 q(x) + R(x) & \text{ریکاتی} \end{cases}$$

مثال : $y' + (\tan x)y = \cos x$ ← خطی مرتبه اول

$y' + e^x y = y^5 e^x$ ← برنولی

$y' + \frac{1}{x} y = (\sin x) y^2 + \cos x$ ← ریکاتی

«فرمول استاندارد» = $y' + P(x)y = q(x)$

$$\mu = e^{\int P(x)dx}$$

$$y = \frac{1}{\mu}\left[\int \mu q(x)\, dx + c\right]$$

مثال : $xy' - y = x(\ln x)^5$:

$= y' - \frac{1}{x} y = (\ln x)^5$

$= P(x) = -\frac{1}{x} , q(x) = (\ln x)^5 \Rightarrow \mu = e^{\int P(x)dx} = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln|x|} = e^{\ln|x|^{-1}} = |x|^{-1}$

$\Rightarrow$ مثبت $= x^{-1} = \boxed{\frac{1}{x}}$ ← جواب

$\to y = \frac{1}{\mu}\left[\int \mu q(x)\, dx + c\right]$

$= \frac{1}{\frac{1}{x}}\left[\int \frac{1}{x}(\ln x)^5 dx + c\right]$

$= x\left(\frac{(\ln x)^6}{6} + c\right)$ ⟶ مشتق‌گیری = $\begin{cases} \int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| \\ \int u' u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} \end{cases}$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject: « معادلات دیفرانسیل ۳ »
Date: « ۴ »

مثال: $(x^2+1)y' + y = (\arctan x)^2$

یادآوری:
$u = \arctan x$
$du = d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$$\Longrightarrow y' + \underbrace{\frac{1}{x^2+1}}_{p(x)}\, y = \underbrace{\frac{1}{x^2+1}(\arctan x)^2}_{q(x)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mu = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int \frac{1}{1+x^2}dx} = e^{\arctan x}$$

$$\Longrightarrow y = \frac{1}{\mu}\left[\int \mu\, q(x)\,dx + c\right] = \frac{1}{e^{\arctan x}}\left[\int \underbrace{e^{\arctan x}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(\arctan x)^2\,dx}_{\text{« I »}} + c\right] \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow I = \int u^2 e^u\,du = (u^2 - 2u + 2)e^u \Longrightarrow \frac{1}{e^{\arctan x}}\left\{\left\{(\arctan x)^2 - 2\arctan x + 2\right)\right.$$

$$\cdot e^{\arctan x} + c\Big] \Rightarrow$$ تمرین

- $\frac{dy}{dx} + (\text{تابعی از } x)\, y = x$ تابعی دیگر از

- $\frac{dx}{dy} + p(y)\,x = q(y)$ ⟶ خطی مرتبه ۱ برحسب x نسبت به y

- $\frac{dy}{dx} + e^x y = \sin x$

- $\frac{dx}{dy} + e^y x = \sin y$

- $\frac{dr}{dz} + e^z r = \sin z$

- $\frac{dt}{du} + e^u t = \sin u$

Scanned by CamScanner

Subject: «معادلات جلسه ۳»
Date: «۴ صفحه»

مثال: $\frac{dx}{dy}+\left(\frac{y+1}{y}\right)x=y^2e^{-y}$ ، که $p(y)=\frac{y+1}{y}$ و $q(y)=y^2e^{-y}$: $\mu=e^{\int p(y)dy}=e^{\int\frac{y+1}{y}dy}=e^{\int(1+\frac{1}{y})dy}\Rightarrow$

$\Rightarrow \mu=e^{\int p(y)dy}=e^{\int\frac{y+1}{y}dy}=e^{\int(1+\frac{1}{y})dy}=e^{y+\ln|y|}=e^{y}\cdot e^{\ln|y|}\Rightarrow$

$\Rightarrow |y|e^{y}\overset{\text{شد}}{=}ye^{y}\Rightarrow x=\frac{1}{\mu}\left[\int\mu q(y)dy+c\right]=\frac{1}{ye^{y}}\left[\int ye^{y}\cdot y^2e^{-y}dy+c\right]$

$\Rightarrow \frac{1}{ye^{y}}\left[\frac{y^4}{4}+c\right]$

مثال: $e^{-t}y'+y=e^{3t}$:

$\overset{\text{استاندارد}}{\Longrightarrow} e^{-t}y'+y=e^{3t}\Rightarrow y'+e^{t}y=e^{4t}$ ، که $p(t)=e^{t}$ و $q(t)=e^{4t}$

$\Rightarrow \mu=e^{\int p(t)dt}=e^{\int e^{t}dt}=e^{e^{t}}$

$\Rightarrow y=\frac{1}{\mu}\left[\int\mu q(t)dt+c\right]=\frac{1}{e^{e^{t}}}\left[\int e^{3t}\cdot e^{e^{t}}dt+c\right]\Rightarrow$ «تغییر متغیر»: $u=e^{t}$ ، $du=d(e^{t})=e^{t}dt$

$\Rightarrow I_1=\int e^{3t}\cdot e^{e^{t}}dt=\int e^{2t}\cdot e^{t}e^{e^{t}}dt$ ($e^{t}dt=du$)

$\Rightarrow \int u^2e^{u}du\overset{\text{جزء به جزء}}{=}(u^2-2u+2)e^{u}$

$\Rightarrow ((e^{t})^2-2e^{t}+2)e^{e^{t}}\Rightarrow \boxed{(e^{2t}-2e^{t}+2)e^{e^{t}}}$ ← جواب

PAPCO

Scanned by CamScanner

معادله برنولی:

$$\text{«}y' + p(x)y = q(x)y^n\text{»} , \text{«}n \neq 0, 1\text{»}$$

تقسیم بر y^n / ضرب در y^{-n}:

$$y' y^{-n} + p(x) y^{1-n} = q(x)$$

معادله $u = y^{1-n}$ — با تغییر متغیر به خطی مرتبه ۱ تبدیل می‌شود.

مثال: $y' + x^2 y = \dfrac{3x^2}{y^2} \rightarrow 3x^2 y^{-2} \rightarrow n = -2$

$$u = y^{1-n} = y^{1-(-2)} = y^3$$

«یادآوری: $(u^n)' = n u' u^{n-1}$»

«$(e^u)' = u' e^u \Rightarrow \int u' e^u dx = e^u$»

مشتق $\rightarrow u' = 3y'y^2$

«طرفین معادله را در $3y^2$ ضرب می‌کنیم تا u' ما ایجاد شود.»

$$\Rightarrow 3y^2 y' + 3y^2 x^2 y = 3y^2 \left(\frac{3x^2}{y^2}\right) \Rightarrow \boxed{\text{«}u' + 3x^2 u = 9x^2\text{»}} \leftarrow \text{خطی مرتبه ۱}$$

$$\Rightarrow u' + \underbrace{3x^2}_{p(x)} u = \underbrace{9x^2}_{q(x)} \Rightarrow \mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 3x^2 dx} = e^{x^3}$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{\mu}\left[\int \mu q(x)\, dx + c\right] = \frac{1}{e^{x^3}}\left[\int 9x^2 e^{x^3} dx + c\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e^{x^3}}\left[3e^{x^3} + c\right] = 3 + ce^{-x^3} \Rightarrow y^3 = u = 3 + ce^{-x^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \sqrt[3]{3 + ce^{-x^3}}}$$

Scanned by CamScanner

Subject: «معادلات حل نشده ۳»
Date: «۷»

مثال: $y' - 2(\tan x)y = \sqrt{y}\sin x \;:\; n = \frac{1}{2}$
(تمرین)

$\longrightarrow y^{\frac{1}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \boxed{n = \frac{1}{2}} \Longrightarrow u = y^{1-n} = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}$

$\longrightarrow u' = \frac{1}{2} y' y^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} y' y^{-\frac{1}{2}}$

«در $\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$ ضرب»

$\longrightarrow \frac{1}{2} y^{-1/2} y' + \frac{1}{2} y^{-1/2}(-2(\tan x) y) = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} (\sin x)^{1/2}$

$\longrightarrow u' - \underbrace{(\tan x)}_{P(x)} u = \underbrace{\frac{1}{2}(\sin x)^{\frac{1}{2}}}_{q(x)}$

$\longrightarrow u = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int \tan x\,dx} = e^{\int -\frac{\sin x}{\cos x}} = e^{\ln|\cos x|} = |\cos x| = \cos x$

$\longrightarrow u = \frac{1}{\mu}\left[\int \mu\, g(x)\,dx + c\right] = \frac{1}{\cos x}\left[\int \cos x\left(\frac{1}{2}(\sin x)^{\frac{1}{2}}\right)dx + c\right]$

$\Longrightarrow \frac{1}{\cos x}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(\sin x)^{3/2}}{3/2} + c\right] = \boxed{\frac{1}{\cos x}\left[\frac{1}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}} + c\right]}$ ← جواب

•• برنولی بر حسب مشتق $\frac{dx}{dy}$ ← «$\frac{dx}{dy} + P(y)x = q(y)x^n$»

مثال ۸: $\frac{dx}{dy} + \frac{1}{2}\left(\frac{y+2}{y}\right)x = \frac{y}{x}$

$\Longrightarrow \frac{dx}{dy} + \frac{1}{2}\left(\frac{y+2}{y}\right)x = \frac{y}{x} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{x+2}{x}\right)y = \frac{x}{y}$

$\Longrightarrow y' + \frac{1}{2}\left(\frac{x+2}{x}\right)y = x y^{-1}$ ؛ «$\boxed{n=-1}$ ← برنولی»

Subject: «معادلات جلسه ۳»
Date: «ص ۵»

تغییر متغیر دهیم $\Longrightarrow u = y^{1-n} = y^{1-(-1)} = y^2$

$\longrightarrow u = y^{1-n} = y^{1-(-1)} = y^2 \longrightarrow u' = 2yy' \longrightarrow 2yy' + 2y\{\frac{1}{2}(\frac{x+2}{x})y\} = 2y(xy)^{-1}$ $\to u = e^{\int p(x)dx}$ $\to u = e^{\int \frac{x+2}{x}}$ $u = e^{\ln x}$

خطی مرتبه اول $\longrightarrow u + \underbrace{\frac{(x+2)}{x}}_{p(x)} u = \underbrace{2x}_{q(x)} \Longrightarrow u = \frac{1}{\mu}\left[\int \mu\, q(x)\, dx + c\right] = \frac{1}{\ln x}\left[\int x\, 2x\, dx + c\right]$

$\Longrightarrow$ «شبیه حل در تمرین‌های قبلی» $\Longrightarrow \mu = e^{x+2\ln x} = x^2 e^x$

$\Longrightarrow u = \frac{1}{x^2 e^x}\left[\int \underbrace{x^2 e^x}_{x^2e^x} \cdot x\, dx + c\right] \Longrightarrow$

مشتق	انتگرال
x^3	$+\ e^x$
$3x^2$	$-\ e^x$
$6x$	$+\ e^x$
6	$-\ e^x$

$\Longrightarrow u = \frac{1}{x^2 e^x}\left[(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + c\right]$

$\xrightarrow{y^2 = u} y^2 = \frac{1}{x^2 e^x}\left[(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + c\right]$, $x \leftrightarrow y$

$\longrightarrow \boxed{x^2 = \frac{1}{y^2 e^y}\left[(y^3 - 3y^2 + 6y - 6)e^y + c\right]} \longrightarrow$ جواب نهایی

PAPCO

Subject: «معادلات جلسه ۳»
Date: «صفر»

معادله‌ی ریکاتی:

$$y' + P(x)\,y = q(x)\,y^2 + R(x)$$

و فرض کنید y_1 جواب معلوم معادله باشد با

تغییر متغیر $y = y_1 + u^{-1}$ معادله به خطی

مرتبه‌ی اول تبدیل می‌شود.

مثال: $y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{xe^x} + e^x$ ، «$y_1 = e^x$»

$$\longrightarrow y = y_1 + u^{-1} = e^x + u^{-1} \longrightarrow y' = e^x - u'u^{-2}$$

$$\longrightarrow e^x - u'u^{-2} + \frac{1}{x}(e^x + u^{-1}) = \frac{1}{xe^x}(e^x + u^{-1})^2 + e^x$$

$$\longrightarrow e^x - u'u^{-2} + \frac{1}{x}e^x + \frac{1}{x}u^{-1} = \frac{1}{xe^x}(e^{2x} + u^{-2} + 2e^x u^{-1}) + e^x$$

$$\longrightarrow \frac{1}{x}e^x + \frac{1}{xe^x}u^{-2} + \frac{2}{x}u^{-1} + e^x$$

$$\longrightarrow -u'u^{-2} - \frac{1}{x}u^{-1} = \frac{1}{xe^x u^2}$$ ← جواب

$$\xrightarrow{\times -u^2} u' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{P(x)}u = \underbrace{\frac{-1}{xe^x}}_{q(x)}$$ ← خطی مرتبه اول

$$\longrightarrow u = e^{\int \frac{1}{x}dx} \longrightarrow u = \frac{1}{x}\left[\int x \cdot \frac{-1}{xe^x}dx + c\right]$$

$$\longrightarrow \frac{1}{x}\left[\int -e^{-x}dx + c\right] = \frac{1}{x}(e^{-x} + c) = \frac{e^{-x} + c}{x}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject: « معادلات جلسه ۲۳ »
Date: « 10 آبان »

$\longrightarrow y = y_1 + u^{-1} = e^x + \left(\frac{e^{-x}+c}{x}\right)^{-1} = e^x + \frac{x}{e^{-x}+c}$ « و $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ »

$\longrightarrow$ $\boxed{e^x + \frac{x}{e^{-x}+c}}$ ← جواب نهایی

« مثال: $y' - (\tan x)\, y = (-\sin x)\, y^2 + \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ و $y_1 = \frac{1}{\cos x}$ »

یادآوری $\to \frac{1}{\cos x} = \sec x$

$\longrightarrow y = y_1 + u^{-1} = \frac{1}{\cos x} + u^{-1} \longrightarrow y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - u'u^{-2}$

$\longrightarrow \frac{\sin x}{\cos^2 x} - u'u^{-2} - \frac{\sin x}{\cos x}\left(\frac{1}{\cos x} + u^{-1}\right) = -\sin x\left(\frac{1}{\cos x} + u^{-1}\right)^2 + \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

$\longrightarrow \frac{\sin x}{\cos^2 x} - u'u^{-2} - \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x}u^{-1} = -\frac{\sin x}{\cos^2 x} -$

$(\sin x)\, u^{-2} - \frac{2\sin x}{\cos x}u^{-1} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \Rightarrow$

$\Rightarrow u' - \underbrace{\frac{\sin x}{\cos x}}_{P(x)} u = \underbrace{\sin x}_{Q(x)}$ ← خطی مرتبه اول

$\mu = e^{\int \frac{\sin x}{\cos x}} \to u = e^{\ln|\cos x|} \longrightarrow u = e^{\ln|\cos x|}$

$\to u = \frac{1}{e^{\ln \cos x}}\left[\int e^{\ln \cos x} \sin x\, dx + c\right] \to u = \frac{1}{\cos x}\left[\underbrace{\int \cos x \sin x\, dx}_{\text{مشتق همراه}} + c\right]$

$\longrightarrow \frac{1}{\cos x}\left[\frac{\sin^2 x}{2} + c\right] \Rightarrow y = y_1 + u^{-1} = \frac{1}{\cos x} + \left\{\frac{1}{\cos x}\left(\frac{\sin^2 x}{2} + c\right)\right\}^{-1}$

Scanned by CamScanner

Subject: معادلات جلسه ۳

Date: ص ۹۹

ادامه. تمرین

1) $y' - (e^{x}+2)y = -e^{x}y^{2} - 2e^{-x} - 1 \,,\; y_1 = e^{-x}$

2) $y' + y^{2} - 2y\sin x + \sin^{2}x = \cos x \,,\; y_1 = \sin x$

3) $y' = x^{3}(y-x)^{2} + \dfrac{y}{x} \,,\; y = x$

PAPCO

Scanned by CamScanner

• برحسب اینکه ۳ ریشه چندجمله‌ای حقیقی باشد ـــ یا مختلف یا تکراری باشد دو

جواب فرق خواهد کرد :

① ریشه‌ها حقیقی باشند و متمایز از هم :

مثال : $y'' - 5y' + 6y = 0$

$P_2(r) = r^2 - 5r + 6 = 0 \longrightarrow (r-2)(r-3) = 0 \to \boxed{r=2}, \boxed{r=3}$

$$\begin{cases} y_1 = e^{r_1 x} = e^{2x} \\ y_2 = e^{r_2 x} = e^{3x} \end{cases} \longrightarrow y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

مثال : $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$

$P_3(r) = r^3 + r^2 - 4r - 4 = r^2(r+1) - 4(r+1) = (r+1)(r^2-4) = 0$

$$\longrightarrow \begin{cases} r+1 = 0 \longrightarrow r = 1 \\ r^2 - 4 = 0 \longrightarrow r = \pm 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y_1 = e^{-1x} \\ y_2 = e^{2x} \\ y_3 = e^{-2x} \end{cases}$$

* اگر مجموع ضرائب چندجمله‌ای صفر شود که ریشه آن (۱) است :

$y''' - 6y'' + 11y' + 6y = 0$

$P_3(r) = r^3 - 6r^2 + 11r - 6$

$\longrightarrow r^3 - 6r^2 + 11r - 5 - 1 = (r^3 - 1) + (-6r^2 + 11r - 5)$

$r_1 = 1,\ r_2 = \frac{5}{6}$

$(r^3-1) \to (r-1)(r^2+r+1)$

$(-6r^2 + 11r - 5) \to -6(r-1)(r-\frac{5}{6})$

Scanned by CamScanner

Subject: معادلات - جلسه ۴
Date: ۲ مهر

$(r-1)(r^2+1+1-4r+5)=(r-1)(r^3-5r+6)=(r-1)(r-2)(r-3)$

$$\begin{cases} r=1 \to y_1=e^{x} \\ r_2 \to y_2=e^{2x} \\ r_3 \to y_3=e^{3x} \end{cases}$$

ریشه های تکراری: اگر $r_1 = r$ ریشه تکراری مرتبه m (km) چندجمله‌ای مشخصه باشد

عبارتی اگر $(r-r_1)^m$ یک عامل تجزیه چندجمله‌ای مشخصه باشد آن‌گاه یک جواب معادله به صورت $y_1=e^{r_1 x}$ است، برای به دست آوردن جواب‌های بعدی این جواب را به طور متوالی در x ضرب می‌کنیم

$$\begin{cases} y_1=e^{r_1 x} \\ y_2 = x y_1 = x e^{r_1 x} \\ y_3 = x y_2 = x^2 e^{r_1 x} \\ y_4 = x^3 e^{r_1 x} \\ \vdots \\ y_m = x^{m-1} e^{r_1 x} \end{cases}$$

مثال: $y''-6y'+9y=0 \longrightarrow P_2(r)=r^2-6r+9=(r-3)^2=0 \longrightarrow r=3$ دوبار

$$\begin{cases} y_1=e^{3x} \\ y_2=xe^{3x} \end{cases} \longrightarrow y_h = c_1y_1+c_2y_2$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

مثال: $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

$P_3(r) = r^3 - 3r^2 + 3r + 1 = (r+1)^3 = 0 \longrightarrow r = -1$ سه بار

$$\begin{cases} y_1 = e^{-1x} = e^{-x} \\ y_2 = x y_1 = xe^{-x} \\ y_3 = x y_2 = x^2 e^{-x} \end{cases} \Longrightarrow y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$$

مثال: $y''' + y'' - y' - y = 0$

$P_3(r) = r^3 + r^2 + r - 1 = r^2(r+1) - (r+1) = (r+1)(r^2-1)$

$= (r+1)(r-1)(r+1) = 0 \longrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ r = -1 \end{cases}$ دو بار

$$\begin{cases} y_1 = e^{1x} = e^{x} \\ y_2 = e^{-x} \\ y_3 = xe^{-x} \end{cases}$$

در معادله $ar^2 + br + c = 0$ هرگاه $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ باشد آنگاه با فرض $i = \sqrt{-1}$

ریشه‌ها مختلط خواهند بود؛ پس اگر $r = a \pm i\beta$ یک ریشه مختلط باشد آنگاه

ادامه ← صفحه بعد

NAHAL

Scanned by CamScanner

Subject: «معادلات حبر۴»
Date: «۴ صف»

$$\begin{cases} y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x) \\ y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x) \end{cases}$$

مستقل باشد آنگاه:

مثال: $y'' - 4y' + 13y = 0$

جواب/: $P_2(r) = r^2 - 4r + 13 = 0$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 13 \end{cases}$$

$\Delta = -36$ ، $\Delta < 0$ ، $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-36} = \sqrt{36}\, i$

$\rightarrow r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm 6i}{2} = \underset{\alpha}{2} \pm \underset{\beta}{3} i \rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x) = e^{2x} \cos(3x) \\ y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x) = e^{2x} \sin(3x) \end{cases}$$

$\longrightarrow$ $\boxed{y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2}$

PAPCO

Subject: «معادلات»
Date: «جلسه ۴ ...»

مثال: $y''' - y = 0$

$\Rightarrow P_3(r) = r^3 - 1 = (r-1)(r^2+r+1) = 0$, $\Delta = -3$

$\rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ r = \underbrace{\frac{-1}{2}}_{\alpha} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\beta} i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{1x} = e^{x} \\ y_2 = e^{-\frac{1}{2}x} \\ y_3 = e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \end{cases}$

مشتق مرتبه ۴

مثال: $y^{(4)} + 13y'' + 36y = 0$

$P_4(r) = r^4 + 13r^2 + 36 = (r^2+4)(r^2+9) = 0 \rightarrow r^2 + 4 = 0 \rightarrow r^2 = -4 \rightarrow r = \pm\sqrt{-4} \Rightarrow \boxed{\pm 2i}$

$r^2 + 9 = 0 \longrightarrow \boxed{\alpha = 0}\ \boxed{\beta = 3}$

$\rightarrow y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x) = e^{0x}\cos(2x) = \cos(2x)$

$y_2 = \ldots = \sin(2x)$

$y_3 = \ldots = \cos(3x)$

$y_4 = \ldots = \sin(3x)$

مشتق مرتبه ۴

مثال: $(y^{(4)}) + 8y'' + 16 = 0$

$P_4(r) = r^4 + 8r^2 + 16 = (r^2+4)^2 = 0$

$\rightarrow r^2 + 4 = 0$ دوبار

$\rightarrow r^2 = -4$ دوبار

$\rightarrow r = \pm 2i$ دوبار

$\rightarrow \begin{cases} y_1 = \cos(2x) \\ y_2 = \sin(2x) \\ y_3 = x y_1 = x\cos(2x) \\ y_4 = x y_2 = x\sin(2x) \end{cases}$

Scanned by CamScanner

معادلات کوشی - اویلر مثل معادلات با ضرایب ثابت هستند فقط با این تفاوت که درکنار

هر مرتبه از مشتق توانی از x را نیز از همان درجه داریم.

$$a_n x^n y^{(n)} + \dots + a_3 x^3 y''' + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = R(x)$$

اگر $R(x)=0$ باشد آنگاه معادله را همگن می‌نامند

$$2x^3 y''' + 3x^2 y'' + 5xy' + 6y = x^2$$

حل همگن: $y = x^r$ جواب معادله همگن است که r ریشه چندجمله‌ای مشخصه زیراست.

$y \longleftrightarrow 1$

$xy' \longleftrightarrow r$

$x^2 y'' \longleftrightarrow r(r-1)$

$x^3 y''' \longleftrightarrow r(r-1)(r-2)$

$\vdots$

$x^n y^{(n)} \longleftrightarrow r(r-1)\dots(r-(n-1))$

$$P_n(r) = a_n r(r-1)\dots(r-(n-1)) + \dots + a_3 r(r-1)(r-2) + a_2 r(r-1) + a_1 r + a_0 = 0$$

*

Scanned by CamScanner

نکته: اگر $r = r_1$ ریشه‌ی تکراری چندجمله‌ای مشخصه باشد آنگاه یک جواب به صورت $y_1 = x^{r_1}$

برای بدست آوردن جواب‌های بعدی این جواب را به طور متوالی در $\ln x$ ضرب می‌کنیم ←

$$\begin{cases} y_1 = x^{r_1} \\ y_2 = (\ln x)\, x^{r_1} \\ y_3 = (\ln x)^2 x^{r_1} \\ \vdots \end{cases}$$

نکته: اگر $r = \alpha \pm i\beta$ ریشه مختلط چندجمله‌ای مشخصه باشد، آنگاه:

$$\begin{cases} y_1 = x^{\alpha} \cos(\beta \ln x) \\ y_2 = x^{\alpha} \sin(\beta \ln x) \end{cases}$$

((اویلر کشی با ضرایب معادله مرتبه‌ی ۲))

مثال: $2x^2 y'' + 3xy' - 3y = 0$

جواب: $P_2(r) = 2r(r-1) + 3r - 3$ → فاکتور: $3(r-1)$

$\rightarrow (r-1)(2r+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r - 1 = 0 \rightarrow r = 1 \rightarrow y_1 = x^{r} = x^1 = x \\ 2r + 3 = 0 \rightarrow r = -\frac{3}{2} \rightarrow y_2 = x^{r} = x^{-3/2} \end{cases}$

$$\rightarrow \boxed{y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2}$$

Scanned by CamScanner

Subject: «معادلات بخش ۴»
Date: «درس ۸»

مثال: $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$

$\rightarrow P(r) = r(r-1) - 4r + 6 = r^2 - 5r + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} r = 2 \rightarrow y_1 = x^2 \\ r = 3 \rightarrow y_2 = x^3 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2}$

مثال: $x^3y''' + 4x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$

$\rightarrow P_r(r) = r(r-1)(r-2) + 4r(r-1) - 2r - 4 \rightarrow$

$\rightarrow r^3 - 3r^2 + 2r + 4r^2 - 4r - 2r - 4 \rightarrow$

$\rightarrow r^3 + r^2 - 4r - 4 = r^2(r+1) - 4(r+1) = (r+1)(r^2-4) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} \boxed{r = -1} \\ \boxed{r = \pm 2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = x^r = x^{-1} \\ y_2 = x^2 \\ y_3 = x^{-2} \end{cases}$

ریشه‌های تکراری: معادلهٔ زیر را حل کنید =

مثال: $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$

$P_r(r) = r(r-1) - 5r + 9 = r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2 = 0 \rightarrow \{r = 3$ دوبار

$\rightarrow \begin{cases} y_1 = x^r = x^3 \\ y_2 = (\ln x)\, x^3 \end{cases} \rightarrow \boxed{y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2}$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject: معادلات جلسه ۴
Date: ۹۰

مثال: $x^3 y''' - 2xy' + 4y = 0$

$P(r) = r(r-1)(r-2) - 2r + 4 = r(r-1)(r-2) - 2(r-2) = (r-2)(r(r-1) - 2)$

$= (r^2 - r - 2) = (r-2)(r-2)(r+1) \longrightarrow \begin{cases} r = 2 & \text{دوبار} \\ r = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_1 = x^2 \\ y_2 = (\ln x)\, x^2 \\ y_3 = x^{-1} \end{cases}$

مثال: $x^3 y''' + 6x^2 y'' + 7xy' + y = 0$

$P(r) = r(r-1)(r-2) + 6r(r-1) + 7r + 1 \longrightarrow r^3 - 3r^2 + 2r + 6r^2 - 6r + 7r + 1 \longrightarrow$

$\longrightarrow r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = (r+1)^3 = 0 \longrightarrow r = -1$ سه بار $\Longrightarrow \begin{cases} y_1 = x^{-1} \\ y_2 = (\ln x)\, x^{-1} \\ y_3 = (\ln x)^2 x^{-1} \end{cases}$

مثال: $x^2 y'' - 3xy' + 13y = 0$

$P(r) = r(r-1) - 3r + 13 = r^2 - 4r + 13 = 0 \longrightarrow r = 2 \pm 3i \longrightarrow \begin{cases} y_1 = x^2 \cos(\beta \ln x) = x^2 \cos(3 \ln x) \\ y_2 = x^2 \sin(\beta \ln x) = x^2 \sin(3 \ln x) \\ y_h = \boxed{c_1 y_1 + c_2 y_2} \end{cases}$

مثال: $x^3 y''' + 3x^2 y'' + xy' - y = 0$

$P(r) = r(r-1)(r-2) + 3r(r-1) + r - 1 \longrightarrow (r-1)(r(r-1) + 3r + 1) = \overbrace{(r-1)(r^2 + r + 1)}^{(r^3 - 1)}$

$\longrightarrow \begin{cases} r = -1 \\ r = \underbrace{\frac{-1}{2}}_{\alpha} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\beta} i \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_1 = x^{-1} \\ y_2 = x^{-1/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \\ y_3 = x^{-1/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \end{cases}$

Scanned by CamScanner

Subject معادلات جلسه ۲۰
Date ۱۵

یونس ۷۷ ، بیا کردن جواب دوم معادلات مرتبه دوم همگن وقتی که یک جواب آن معلوم باشد . فرض کنید y_1 جواب معلوم معادله $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ باشد در این حالت جواب دوم معادله به صورت زیر بدست می آید :

$$y_2 = v y_1 , \quad v' = \frac{1}{y_1^2} e^{\int -P(x)\,dx}$$

((توجه : ضریب y'' یک است))

مثال : جواب عمومی معادله را پیدا کنید

«در امتحان حتماً سؤال دارید»

$$x^2 y'' - 4xy' + (6 - x^2)y = 0 , \quad y_1 = x^2 e^x$$

$$P(x) = \frac{-4x}{x^2} = \frac{-4}{x} \longrightarrow$$ ضریب y'' باید ۱ باشد $\longrightarrow$

*# نکته : اگر معادله مرتبه اول دو تا جواب داشت از رابطه بروید ولی اگر معادله مرتبه ۲ بود دو تا جواب داشت در سؤال از راه اول این سؤال حل کنید .

$$\rightarrow \int -P(x)\,dx = \int \frac{4}{x}\,dx = 4\ln|x| = \ln|x|^4 = \ln x^4 \longrightarrow$$

$$\rightarrow y_2 = v y_1 , \quad v' = \frac{1}{y_1^2} e^{\int -P(x)\,dx} = \frac{1}{(x^2 e^x)^2} e^{\ln x^4} = \frac{x^4}{x^4 e^{2x}} = e^{-2x} \longrightarrow$$

$$\rightarrow v = \int e^{-2x}\,dx = \frac{-1}{2} e^{-2x} \longrightarrow \boxed{y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2}$$

مثال : $y'' + (\tan x)y' + \left(\frac{\tan x}{x} - \frac{2}{x^2}\right)y = 0 , \quad y_1 = \frac{1}{x}$

$$P(x) = \tan x \longrightarrow \int -P(x)\,dx = \int -\tan x\,dx = \int -\frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \ln|\cos x| =$$

$$= \ln(\cos x) \longrightarrow y_2 = v y_1 , \quad v' = \frac{1}{y_1^2} e^{\int -P(x)\,dx} \Longrightarrow \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} e^{\ln(\cos x)} = x^2 \cos x \longrightarrow$$

Scanned by CamScanner

$\longrightarrow v = \int x^2 \cos x \, dx \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} (x^2-2)\sin x + 2x\cos x$

$y_2 = v y_1 = \frac{1}{x}\{(x^2-2)\sin x + 2x\cos x\} = (x - \frac{2}{x})\sin x + 2\cos x$

$\longrightarrow y_h = \boxed{c_1 y_1 + c_2 y_2}$

پس سئوال مهم و حتماً سئوال است حدود ۲ نمره دارد :

$\Big\downarrow$

... معادلهٔ مرتبهٔ ۲ کامل = معادلهٔ $\longleftarrow$ $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$

را کامل درنظر گرفته توابعی مانند $A(x)$ + $B(x)$ موجود باشند به طوری که

$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = (A(x)y' + B(x)y)'$

شرط کامل بودن معادله : $\longleftarrow$ $\boxed{a_2'' - a_1' + a_0 = 0}$

**#مثال = انتگرال‌پذیری نشان دهید معادلهٔ زیر کامل است و سپس آن را حل کنید :

$(\underbrace{\sin x}_{a_2})y'' + (\underbrace{2\cos x}_{a_1})y' - (\underbrace{\sin x}_{a_0})y = 0$

$\rightarrow a_2'' - a_1' + a_0 = -\sin x - (-2\sin x) + (-\sin x) = 0 \Longrightarrow$

$\rightarrow (\sin x)y'' + (2\cos x)y' - (\sin x)y = (A(x)y' + B(x)y)' \longrightarrow$

$\rightarrow A'(x)y' + A(x)y'' + B'(x)y + B(x)y' = A(x)y'' + (A'(x) + B(x))y' + B'(x)y$

$\rightarrow \begin{cases} A(x) = \sin x \\ B'(x) = -\sin x \longrightarrow B(x) = \cos x \end{cases} \longrightarrow$ معادله $= ((\sin x)y' + (\cos x)y)' = 0 \longrightarrow$

Scanned by CamScanner

Subject «معادلات جلسه ۴»

Date «۱۲ مهر»

$\longrightarrow (\sin x)y' + ((\cos x)y) = c_1 \longrightarrow y' + \frac{\cos x}{\sin x}y = \frac{c_1}{\sin x}$ معادله خطی مرتبه اول

$\longrightarrow \mu = e^{\int \frac{\cos x}{\sin x}dx} = e^{\ln(\sin x)} = |\sin x| =$ مثبت $\longrightarrow \sin x$

$\longrightarrow y = \frac{1}{\sin x}\left[\int (\sin x)\frac{c_1}{\sin x}dx + c_2\right] = \boxed{\frac{1}{\sin x}\left[c_1 x + c_2\right]}$

• حل معادلات خطی مرتبه‌ی n و کوشی اویلر ناهمگن : * [تعیین جواب خصوصی]

• $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = R(x)$.

• $a_n x^n y^{(n)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = R(x)$.

• ابتدا به جای $R(x)$ صفر قرار می‌دهیم و معادله‌ی همگن آن را حل می‌کنیم سپس با استفاده از ۲ روش زیر برای معادله‌ی ناهمگن جواب خصوصی پیدا می‌کنیم :

① روش تغییر پارامترها.

② روش ضرایب نامعین. (مرجع)

$y_c = y_h + y_p$

- y_c ← جواب عمومی معادله ناهمگن
- y_h ← جواب عمومی معادله همگن
- y_p ← جواب خصوصی

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject: معادلات دیفرانسیل ۴۰
Date: ۱۳ آبان ۱۴۰۰

روش تغییر پارامتر ها : این روش هم برای معادلات با ضرایب ثابت به کار می رود هم

برای معادلات کوشی اویلر در حالی که روش ضرایب نامعین فقط برای معادله با ضرایب ثابت به کار می رود.

• فرض کنید y_1 و y_2 جواب های مستقل خطی معادله ی همگن $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ باشد (توجه: ضریب y''، 1 است)

آن گاه جواب خصوصی معادله $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ به صورت زیر بدست می آید :

نماد دترمینان رونسکی یا رونسکین : $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 0 \\ R(x) \end{bmatrix}$ (به شرطی که ضریب y''، 1 باشد)

• $y_p = C_1 y_1 + C_2 y_2$: (تابع است) $C_1' = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ R(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)}$, $C_2' = \dfrac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & R(x) \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)}$

$C_1 = \int \dfrac{-y_2 R(x)}{W} dx$, $C_2 = \int \dfrac{y_1 R(x)}{W} dx$

* « این تست ۲ یا ۳ نمره دارد »

مثال : $y'' - 5y' + 6y = xe^x \longrightarrow y'' - 5y' + 6y = 0$ حل همگن

$\rightarrow P(r) = r^2 - 5r + 6 = 0 \longrightarrow r = 2, r = 3 \longrightarrow y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{3x}$ جواب های همگن

« $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$ » $= C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

$\rightarrow y_p = C_1 y_1 + C_2 y_2$

$\rightarrow W(y_1, y_2) = W(e^{2x}, e^{3x}) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 3e^{5x} - 2e^{5x} = e^{5x}$, $A = \begin{bmatrix} 0 \\ xe^x \end{bmatrix}$ (سمت راست)

$\rightarrow C_1' = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \\ xe^x & 3e^{3x} \end{vmatrix}}{W(e^{2x}, e^{3x})} = \dfrac{-xe^{4x}}{e^{5x}} = -xe^{-x} \longrightarrow C_1 = \int -xe^{-x} dx \overset{\text{جزء به جزء}}{=} (x+1)e^{-x}$

$\rightarrow C_2' = \dfrac{\begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & xe^x \end{vmatrix}}{W(e^{2x}, e^{3x})} = \dfrac{xe^{3x}}{e^{5x}} = xe^{-2x} \longrightarrow C_2 = \int xe^{-2x} dx \overset{\text{جزء به جزء}}{=} (-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4})e^{-2x}$

PAPCO

Scanned by CamScanner

«معادلات ص۱۴»

«جلسه ۳»

$\rightarrow y_p = \ell_1 y_1 + \ell_2 y_2 = (x+1)e^{-x} \cdot e^{2x} + (-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4})e^{-2x} \cdot e^{3x} = (\frac{1}{2}x + \frac{3}{4})e^{x}$

$\rightarrow y_c = y_h + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + (\frac{1}{2}x + \frac{3}{4})e^{x}$

مثال: $x^2 y'' - 4xy' + 6y = x^2(\ln x)$

حل همگن $\Rightarrow x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0 \rightarrow P(r)(r) = r(r-1) - 4r + 6 = r^2 - 5r + 6 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow r = 2, r = 3 \rightarrow \begin{cases} y_1 = x^r = x^2 \\ y_2 = x^r = x^3 \end{cases}$

★ نکته مهم: در روش تغییر پارامترها ابتدا جواب معادله‌ی همگن را بدست آورید سپس برای اعمال روش ضریب y'' را به ۱ تبدیل نیم بنابراین تا بع سمت راست $R(x)$ تغییر خواهد کرد.

$\rightarrow R(x) = \frac{x^2 \ln x}{x^2} = \ln x \;,\; W(x^2, x^3) = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^4 - 2x^4 = x^4$

$\rightarrow y_p = \ell_1 y_1 + \ell_2 y_2 \;,\; T = [\ln x] \;,$

$\rightarrow \ell_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^3 \\ \ln x & 3x^2 \end{vmatrix}}{W(x^2, x^3)} = \frac{-x^3 \ln x}{x^4} = \frac{-\ln x}{x} \xrightarrow{\text{مشتق همراه}} L_1 = \int \frac{-\ln x}{x} dx = -\frac{(\ln x)^2}{2}$

$\rightarrow \ell_2' = \frac{\begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & \ln x \end{vmatrix}}{W(x^2, x^3)} = \frac{x^2 \ln x}{x^4} = \rightarrow x^{-2} \ln x \stackrel{\text{جزء به جزء}}{=} \frac{x^{-2+1}}{-2+1}\left(\ln x - \frac{1}{-2+1}\right) =$

$\rightarrow -x^{-1}(\ln x + 1) = -\frac{\ln x + 1}{x}$

یادآوری: $\int u' u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} \leftarrow$ مشتق همراه

$\int x^n \ln x =$ جزء به جزء $\rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right)$

$\rightarrow y_p = \ell y_1 + \ell y_2 = -\frac{(\ln x)^2}{2} x^2 - \left(\frac{\ln x + 1}{x}\right) x^3 = -x^2 \left\{ \frac{(\ln x)^2}{2} + \ln x + 1 \right\}$

$\rightarrow y_c = y_h + y_p = c_1 x^2 + c_2 x^3 - x^2 \left\{ \frac{(\ln x)^2}{2} + \ln x + 1 \right\}$

Scanned by CamScanner

* روش ضرایب نامعین = این روش برای معادلات با ضرایب ثابت به کار می رود. ابتدا معادله همگن را حل می کنیم و سپس بر حالت زیر جواب خصوصی را با ضرایب مجهول حدس می زنیم و با جایگذاری در معادله ی ناهمگن ضرایب مجهول را بدست می آوریم :

① تابع سمت راست چندجمله ای باشد.

② تابع سمت راست چندجمله ای ضرب در تابع نمایی باشد.

③ تابع سمت راست چندجمله ای ضرب در تابع مثلثاتی $\cos(\alpha x)$ یا $\sin(\alpha x)$ باشد.

④ ترکیب و حاصل ضرب سه حالت بالا.

① اگر $R(x) = P_n(x)$ یک چندجمله ای از درجه n باشد آنگاه : $y_p = x^m(A_n x^n + \dots + A_1 x + A_0)$

② اگر $R(x) = P_n(x) e^{\alpha x}$ آنگاه : $y_p = x^m e^{\alpha x}(A_n x^n + \dots + A_1 x + A_0)$

③ اگر $R(x) = P_n(x)\cos(\beta x) e^{\alpha x}$ آنگاه : $y_p = x^m e^{\alpha x}\big((A_n x^n + \dots + A_1 x + A_0)\cos(\beta x) + (B_n x^n + \dots + B_1 x + B_0)\sin(\beta x)\big)$

یا $= P_n(x)\sin(\beta x)$ همگن می شود

خلاصه ی x^m = ابتدا m را صفر در نظر می گیریم جواب را حدس می زنیم و اگر یک از اجزای تشکیل دهنده ی جواب خصوصی جواب معادله ی همگن نیز باشند، آنگاه آن مثبت جواب خصوصی را به طور متوالی در x ضرب می کنیم تا جایی که هیچ کدام از اجزای تشکیل دهنده ی آن جواب معادله ی همگن نباشد.

مثال = جواب خصوصی معادلات زیر را حدس بزنید :

① $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + x)e^{3x} + (x+2)\cos(3x) + x^3$:

② $y''' + 3y'' + 3y' + y = (x^2+1)e^{-x}$:

③ $y^{(4)} + 8y'' + 16y = (x^2+1)\sin(2x) + x^2 e^{2x}$:

حل جواب این معادلات صفحه بعد

Scanned by CamScanner

① جواب $\Longrightarrow$ $y''-5y'-6y=0 \longrightarrow$ $\boxed{y_1=e^{2x},\ y_2=e^{3x}}$ جواب‌های همگن

$y_p = x(Ax^2+Bx+C)e^{3x}+(A_2x+A_1)\cos(3x)+(B_2x+B_1)\sin(3x)+D_3x^3+D_2x^2+D_1x+D_0$

② جواب $\Longrightarrow$ $y'''+3y''+3y'+y=0 \longrightarrow P_3(r)=r^3+3r^2+3r+1=(r+1)^3=0 \longrightarrow r=-1$ ۳ بار

$$\longrightarrow \begin{cases} y_1=e^{-x} \\ y_2=xe^{-x} \\ y_3=x^2e^{-x} \end{cases}$$

③ جواب $\Longrightarrow$ $y^{(4)}+8y''+16y=0 \longrightarrow P_4(r)=r^4+8r^2+16=0 \longrightarrow (r^2+4)^2=0$

$\longrightarrow r=\pm 2i$ ۲ بار $\xrightarrow{\text{جواب‌های همگن}}$

$$\begin{cases} y_1=\sin(2x) \\ y_2=\cos(2x) \\ y_3=x\sin(2x) \\ y_4=x\cos(2x) \end{cases}$$

$\longrightarrow x(A_2x^2+A_1x+A_0)\sin(2x)+x(B_2x^2+B_1x+B_0)\cos(2x)+$
$(C_2x^2+C_1x+C_0)e^{3x}$

Scanned by CamScanner

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید:

$$y''' - y'' = xe^x + 2x + 3$$

$$P_3(r) = r^3 - r^2 = r^2(r-1) = 0 \longrightarrow \begin{cases} r=0 \\ r=1 \end{cases} \xrightarrow{\text{۲ بار}} \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = x \\ y_3 = e^x \end{cases}$$

$$y_p = x(Ax+B)e^x + (Cx+D)x^2 = (Ax^2+Bx)e^x + Cx^3 + Dx^2$$

$$y'_p = (Ax^2 + Bx + 2Ax + B)e^x + 3Cx^2 + 2Dx$$

$$\checkmark\ y''_p = (Ax^2 + (4A+B)x + 2A + 2B)e^x + 6Cx + 2D$$

$$\checkmark\ y'''_p = (Ax^2 + (4A+B)x + 2B + 2A + 2Ax + 4A + B)e^x + 6C$$

$$= (Ax^2 + (6A+B)x + 6A + 3B)e^x + 6C$$

$$y'''_p - y''_p = (2Ax + 4A + B)e^x + 6C - 6Cx - 2D = xe^x + 2x + 3$$

$$\longrightarrow 2A = 1 \longrightarrow \boxed{A = \tfrac{1}{2}}$$

$$4A + B = 0 \longrightarrow B = -4A \Rightarrow \boxed{B = -2}$$

$$-6C = 2 \longrightarrow C = \boxed{-\tfrac{1}{3}}$$

$$6C - 2D = 3 \longrightarrow 6\left(-\tfrac{1}{3}\right) - 2D = 3 \longrightarrow -2D = 5$$

$$D = \boxed{-\tfrac{5}{2}}$$

$$\longrightarrow y_p = \left(\tfrac{1}{2}x^2 - 2x\right)e^x - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{5}{2}x^2$$

$$\Longrightarrow y = C_1 + C_2 + C_3e^x + \left(\tfrac{1}{2}x^2 - 2x\right)e^x - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{5}{2}x^2$$

تبدیل معادلات کوشی اویلر به معادلات با ضرایب ثابت:

معادلات کوشی اویلر را می‌توان با تغییر متغیر $z = \ln x$ یا $x = e^z$ به معادله‌ی دیفرانسیل با ضرایب ثابت برحسب مشتقات y نسبت به z تبدیل کرد، برای این منظور چندجمله‌ای مشخصه معادلات کوشی اویلر را برحسب توان‌های r بدست آورده و ساده می‌کنیم و سپس قرار می‌دهیم:

$$r^n \longleftrightarrow \frac{d^n y}{dz^n} = y^{(n)}$$

(مشتق مرتبه n ام نسبت به z)

Scanned by CamScanner

مثال: $x^3y''' + 3x^2y'' + xy' - y = (\ln x)^2 + 2\ln x$:

$P_3(r) = r(r-1)(r-2) + 3r(r-1) + (r-1) = r^3 - 3r^2 + 2r + 3r^2 - 3r + r - 1 = r^3 - 1$

$z = \ln x \;,\; r^3 \longleftrightarrow \dfrac{d^3y}{dz^3}$ $\xrightarrow[\text{ثابت بی تغییر}]{\text{معادله با ضرائب}}$ $\boxed{\dfrac{d^3y}{dz^3} - y = z^2 + 2z}$

$\to r^3 - 1 = 0 \to r = -1,\; \boxed{r = -\frac{1}{2}},\; \boxed{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,i}$

$$\to \begin{cases} y_1 = e^{-1z} = e^{-1\ln x} = x^{-1} \\ y_2 = e^{\alpha z}\cos(Bz) = e^{-\frac{1}{2}z}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right) = e^{-\frac{1}{2}\ln x} \times \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) \\ y_3 = \dots = \left(x^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) \end{cases}$$

مثال: $y''' - y = z^2 + 2z$:

«مشابه z»

$y_p = Az^2 + Bz + C$

جایگذاری $\longleftarrow \begin{cases} y'_p = 2Az \\ y''_p = 2A \\ y'''_p = 0 \end{cases} \Longrightarrow y'''_p - y_p = z^2 + 2z \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = -2 \\ C = 0 \end{cases} \to y_p = -z^2 - 2z$

$\longrightarrow -(\ln x)^2 - 2(\ln x)$

مبحث مهم و سؤال می آید ⟸ حل معادلات دیفرانسیل مرتبه ی ۲ با استفاده از سری های توانی

هدف حل معادله ی $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ به صورت یک سری توانی است، که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله ای هستند یا کسرهایی هستند که صورت و مخرج آن ها چند جمله ای است.

تعریف: نقطه ی x_0 را یک نقطه عادی معادله $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ گوییم هرگاه توابع $P(x)$ و $Q(x)$ در x_0 پیوسته باشند. به عبارتی دیگر حدود زیر موجود و متناهی باشد:

$\lim_{x \to x_0} P(x) \;,\; \lim_{x \to x_0} Q(x)$

Scanned by CamScanner

• هر حدود صفحه‌ی قبل حدودی باشند حتی نا متناهی باشند، x_0 را یک نقطه‌ی نا معمولی یا نا منفرد می‌گویند.

• به عبارت دیگر ریشه‌های مخرج کسرهای شکل $P(x)$ و $Q(x)$ ریشه‌های منفرد معادله هستند:

« ریشه‌های $P_2(x)$ در $P_2(x)y''+P_1(x)y'+P_0(x)y=0$ نقاط منفرد معادله هستند »

• نقاط منفرد به صورت منظم و نامنظم دسته‌بندی می‌شوند:

تعریف نقطه‌ی منفرد منظم ⟸ $x=x_0$ نقطه‌ی منفرد معادله‌ی $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ است هرگاه حدود زیر موجود و متناهی باشند:

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)P(x)=P_0$$

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2Q(x)=q_0$$

در غیر این صورت منفرد نامنظم می‌باشد.

مثال:

مثال: نقاط منفرد معادله‌ی زیر را تعیین نموده و نوع آن‌ها را مشخص کنید:

$$x^3(x^2-1)y''+x(x^2+1)y'+(x^2-1)^3y=0$$

جواب/ نقاط منفرد $x^3(x^2-1)=0 \longrightarrow x=0,1,-1$

$$P(x)=\frac{x(x^2+1)}{x^3(x^2-1)}$$

$$Q(x)=\frac{(x^2-1)^3}{x^3(x^2-1)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(x-0)P(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x^2+1)}{x^3(x^2-1)}=\infty$$ « x_0 نقطه منفرد نامنظم »

$$P_0=\lim_{x\to 1}(x-1)P(x)=\lim_{x\to 1}(x-1)\frac{x(x^2+1)}{x^3(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x(x+1)}=\frac{1}{2}$$

$$q_0=\lim_{x\to 1}(x-1)^2Q(x)=\lim_{x\to 1}(x-1)^2\frac{(x^2-1)^3}{x^3(x^2-1)}=0$$

« نقاط منفرد: $x=1$, $x=-1$ »

Scanned by CamScanner

* هدف: جواب معادله‌ی دیفرانسیل را به صورت یک سری توانی حول یک نقطه‌ی عادی به دست آوریم یا به صورت یک سری فروبنیوس حول نقطه‌ی منفرد منظم به دست آوریم.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

به n یک واحد اضافه می‌کنیم تا x^n داشته باشیم، بنابراین یک واحد از شمارنده کم می‌کنیم.

$$\Rightarrow x y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$$

* اگر یک واحد به متغیر n اضافه کنیم باید یک واحد از شمارنده کم کنیم.

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

از شمارنده ۲ واحد کم می‌کنیم و در جلوی زیگما هم n را به n+2 تبدیل می‌کنیم تا x^n داشته باشیم.

مثال: جواب معادله‌ی زیر را به صورت یک سری توانی حول نقطه‌ی $x=0$ به دست آورید:

$$y'' + 2xy' + 2y = 0 \rightarrow y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow x y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$$

$$\rightarrow y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

جایگذاری

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

* هدف ایجاد x^n در جلوی همه‌ی زیگماها است.

$$\Rightarrow 2a_2 x^0 + 2a_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{(n+2)(n+1) a_{n+2} + 2n a_n + 2a_n\} x^n = 0$$

$\Rightarrow$ ادامه‌ی جواب صفحه‌ی بعد

Scanned by CamScanner

$\rightarrow 2a_2 + 2a_0 = 0 \rightarrow a_2 = -a_0$ «a_0 دلخواه»

$\rightarrow (n+2)(n+1)a_{n+2} + n a_n + 2a_n = 0 \rightarrow (n+1)(n+2)a_{n+2} = -2(n+1)a_n$

$\rightarrow a_{n+2} = \frac{-2}{n+2} a_n \rightarrow$ جمله بازگشتی ، $n = 1, 2, \ldots$

$n = 1 \rightarrow a_3 = \frac{-2}{3} a_1$

$n = 2 \rightarrow a_4 = \frac{-2}{4} a_2 = \frac{-2}{4}(-a_0) = \frac{2}{4} a_0$

$n = 3 \rightarrow a_5 = \frac{-2}{5} a_3 = \frac{-2}{5} \times \frac{-2}{3} a_1 = \frac{(-2)^2}{5 \times 3} a_1$

$n = 4 \rightarrow a_6 = \frac{-2}{6} a_4 = \frac{-2}{6} \times \frac{2}{4} a_0 = \frac{-2^2}{6 \times 4} a_0$

مثال:

$(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$

جواب/ $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,,\; y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \,,\; y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n+1) a_n x^{n-2}$

$\rightarrow y' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m \,,\; y'' = \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} x^m$

$\rightarrow x^2 y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n$

$\rightarrow x y' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n$

$\rightarrow (1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$

$\rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2a^n + \sum_{n=0}^{\infty} 6a_n = 0$

$\rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \{(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n(n-1) - 2n + 6)a_n\} \times x^n$

$\rightarrow 2a_2 + 6a_3 x + 6a_0 - 2a_1 x + 6a_1 x = 0 \Rightarrow (6a_3 + 4a_1)x + 2a_2 + 6a_0 = 0 \Rightarrow$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow \begin{cases} 6a_3 + 4a_1 = 0 \longrightarrow a_3 = -\frac{4}{6} a_1 = \boxed{-\frac{2}{3} a_1} \\ a_2 = -\frac{6a_0}{2} = \boxed{-3a_0} \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

۱) معادلات فاقد [illegible] y, y'

۲) معادلات فاقد x ← $y'=p \to y''=p\frac{dp}{dy}, y'''=\cdots$ که مشتق مرتبه یک حذف

۳) x تابعی از y و y' : $x=f(y,y')$ ← تقسیم بر dy کنیم ← $y'=p \Rightarrow \frac{1}{p}=f_y+f_p\frac{dp}{dy}$

۴) y تابعی از x و y' : $y=f(x,y')$ ← تقسیم بر dx کنیم ← $y'=p \to p=f_x+f_p\frac{dp}{dx}$

معادله لاگرانژ و کلرو حالت خاص [illegible] خانواده هستند

$$\begin{cases} y=xf(y')+g(y') & \text{لاگرانژ} \\ y=xy'+g(y') & \text{کلرو} \end{cases}$$

مثال ... page(63)

(1)

اگر معادله فاقد $y, y', \dots \to y^{(n)}$ باشد آنگاه با تغییر متغیر $u = y^{(n+1)}$

معادله ای که مرتبه پیدا می کند ... مرتبه مشتق ... معادله را ... مرتبه کاهش می یابد

$$xy''' + y'' = 0 \quad , \quad x > 0 \qquad y'' = u$$

فاقد y, y'

$$\to y''' = u' \qquad (xy''' + y'' = x, \ldots)$$

$$\to xu' + u = 0 \to (xu)' = 0$$

$$\to x\frac{du}{dx} + u = 0$$

$$\to x\,du + u\,dx = 0$$

$$\to d(xu) = 0$$

$$\to xu = c_1 \quad \to u = \frac{c_1}{x} \to y'' = \frac{c_1}{x}$$

$$\to y' = \int \frac{c_1}{x}dx + c_2 = c_1 \ln x + c_2$$

$$\to y = c_1\int \ln x\,dx + c_2 x + c_3$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x \cdot \tfrac{1}{x}\,dx = x(\ln x - 1)$$

$$\to y = c_1 x(\ln x - 1) + c_2 x + c_3$$

تمرین

$$y''' - \frac{1}{x}y'' = x^2 \to u' - \frac{1}{x}u = x^2 \to u = x\left(\tfrac{x^2}{2} + c\right) \to y'' = \tfrac{x^3}{2} + cx \to y = ?$$

$$y = \frac{x^5}{40} + c_1 x(\ldots) + c_2 x + c_3$$

$$x^2 y^{(4)} - 2xy''' + 2y'' = 0 \quad , \quad y'' = u \to y''' = u', \; y^{(4)} = u''$$

$$\to x^2u'' - 2xu' + 2u = 0$$

$$\to u = c_1 x + c_2 x^2 \to y'' = c_1 x + c_2 x^2 \to y' = c_1 \tfrac{x^2}{2} + c_2\tfrac{x^3}{3} + c_3$$

$$\to y = c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^4}{12} + c_3 x + c_4$$

$$\to y = c_1 x^4 + c_2 x^3 + c_3 x + c_4$$

$(\sin x\, y')' = x$

$\to (\cos x) y' + y'' \sin x = e^x(\sin x + \cos x)$

$(\cos x)y' + y''\sin x = e^x(\sin x + \cos x)$

$y''' - y'' = x^2$

اگر معادله فاقد x باشد آنگاه با تغییر متغیر $y' = P$ ، مرتبه یکی کاهش می یابد

$$y' = \frac{dy}{dx} = P \to y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dP}{dx}$$

$$= \frac{dP}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = P\frac{dP}{dy}$$

$$\to y'' = P\frac{dP}{dy} \qquad y''' = P\left(\frac{dP}{dy}\right)^2 + P^2\frac{d^2P}{dy^2}$$

Scanned by CamScanner

معادله زیر را حل کنید: (ناقد x)

$$y'' - \frac{y'^2}{y} = y^2 y' \quad , y \neq 0$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1/2 \end{cases}$$

$$\longrightarrow P\frac{dP}{dy} - \frac{P^2}{y} = Py^2 \Rightarrow$$

$$\frac{dP}{dy} - \frac{1}{y}P = y^2$$ خطی

$$\longrightarrow \mu = e^{\int -\frac{1}{y}dy} = e^{-\ln|y|} = \frac{1}{y}$$

$$\longrightarrow P = \frac{1}{\frac{1}{y}}\left[\int \frac{1}{y} \cdot y^2 dy + c\right] = y\left[y^2/2 + c\right]$$

$$\longrightarrow \begin{cases} y' = y\left[\frac{y^2}{2} + c\right] \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c = 0 \Rightarrow y' = \frac{y^3}{2}$$

$$\longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{2} \longrightarrow$$

$$\Rightarrow y^{-3}dy = \frac{1}{2}dx \longrightarrow \frac{y^{-2}}{-2} = \frac{1}{2}x + c_1$$

$$\Rightarrow y^{-2} = -x + c_2$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{1}{-x + c_2} \quad \bullet \quad y(0) = 1$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{c_2 - 0} \Rightarrow c_2 = 1$$

$$\longrightarrow y^2 = \frac{1}{1-x} \longrightarrow y = \sqrt{\frac{1}{1-n}}$$

Scanned by CamScanner

معادله زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} y'' - 2yy' - y' = 0 \\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0 \end{cases} \qquad (\text{فاقد } x)$$

~~$P = y' \to P' - 2yP - P = 0$~~ , $\begin{cases} y' = P \\ y'' = P\dfrac{dP}{dy} \end{cases}$

$\to$ ~~$P' = (2y+1)P \to$~~

$$\Rightarrow P\frac{dP}{dy} - 2yP - P = 0$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{dP}{dy} - 2y - 1\right) = 0 \longrightarrow \begin{cases} P = 0 \to y' = 0 \to y = C \\ \dfrac{dP}{dy} - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \frac{dP}{dy} = 2y + 1 \to dP = (2y+1)\,dy$$

$$\longrightarrow P = y^2 + y + C \Rightarrow \begin{cases} y' = y^2 + y + C \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow C = 0$$

از این سمت باید [illegible] نسبت به x مشتق بگیرم: $P' = 2yy' + y' \to y'' = 2yy' + y'$

$$\Rightarrow y' = y^2 + y \to \frac{dy}{dx} = y^2 + y \to \frac{dy}{y^2 + y} = dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2 + y} = \int dx + C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y^2 + y} = \frac{1}{y(y+1)} = \frac{-1}{y+1} + \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right) dy = x + C_1$$

$$\Rightarrow \ln|y| - \ln|y+1| = x + C_1$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = x + C_1$$

$$\longrightarrow \left|\frac{y}{y+1}\right| = e^{x + C_1} = C_2 e^x$$

$$\longrightarrow \frac{y}{y+1} = C_3 e^x \Rightarrow \frac{y+1}{y} = C_4 e^{-x} \Rightarrow 1 + \frac{1}{y} = C_4 e^{-x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} = C_4 e^{-x} - 1 \longrightarrow y = \frac{1}{C_4 e^{-x} - 1} \qquad y(0) = -1 \to C_4 = ?$$

Scanned by CamScanner

معادله زیر را حل کنید!

$$x(y')^2 - 2yy' - x = 0$$

این معادله را می‌توان هم برحسب x و هم برحسب y حل کرد

$$y' = p \rightarrow xp^2 - 2yp - x = 0$$

$$\xrightarrow{(1)} x = \frac{2yp}{p^2-1} \xrightarrow{\text{نسبت به } y \text{ مشتق می‌گیریم}} \frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\left\{\frac{2yp}{p^2-1}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{(p^2-1)\{2p + 2y\frac{dp}{dy}\} - 2p\frac{dp}{dy}(2yp)}{(p^2-1)^2} \quad \left(\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{(p^2-1)^2}{p} = (p^2-1)\left(2p + 2y\frac{dp}{dy}\right) - 4yp^2\frac{dp}{dy}$$

$$\Rightarrow (p^2-1)^2 = p(p^2-1)\left\{\left(2p + 2y\frac{dp}{dy}\right)\right\} - 4yp^3\frac{dp}{dy}$$

$$\Rightarrow (p^2-1)^2 = 2p^2(p^2-1) + \frac{dp}{dy}\left\{2yp(p^2-1) - 4yp^3\right\}$$

$$\Rightarrow (p^2-1)^2 = 2p^2(p^2-1) + \frac{dp}{dy}\left\{-2yp - 2yp^3\right\}$$

$$\Rightarrow (p^2-1)^2 = 2p^2(p^2-1) - 2yp(p^2+1)\frac{dp}{dy}$$

$$\Rightarrow (p^2-1)^2 - 2p^2(p^2-1) = -2yp(p^2+1)\frac{dp}{dy}$$

$$\Rightarrow (p^2-1)\{p^2 - 1 - 2p^2\} = -2yp(p^2+1)\frac{dp}{dy}$$

$$\Rightarrow -(p^2-1)(p^2+1) = -2yp(p^2+1)\frac{dp}{dy}$$

$$\Rightarrow p^2 - 1 = 2yp\frac{dp}{dy}$$

$$\Rightarrow \frac{2p}{p^2-1}dp = \frac{dy}{y} \rightarrow \int\frac{2p}{p^2-1}dp = \int\frac{dy}{y} + \ln|c|$$

$$\Rightarrow \ln|p^2-1| = \ln|y| + \ln|c| = \ln|cy|$$

$$\Rightarrow |p^2-1| = |cy| \Rightarrow \boxed{p^2 - 1 = cy} \quad (2)$$

$$\boxed{x = \frac{2yp}{p^2-1}} \quad (1)$$

از رابطه یک (1) داریم

با جایگذاری داریم

$$x = \frac{2yp}{cy} = \frac{2p}{c} \Rightarrow \boxed{p = \frac{c}{2}x} \quad (3)$$

رابطه (3) را در رابطه (2) جایگذاری می‌کنیم

$$\left(\frac{c}{2}x\right)^2 - 1 = cy \Rightarrow \boxed{c^2x^2 - 4 = 4cy} \quad \text{جواب}$$

اینجا از رابطه برحسب x, y حل می‌کنیم

$$y = \frac{1}{2}x\left(y' - \frac{1}{y'}\right) = \frac{1}{2}x\left(p - \frac{1}{p}\right)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x\left(p - \frac{1}{p}\right)$$

نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{2}x\left(\frac{dp}{dx} + \frac{1}{p^2}\frac{dp}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{2}x\left(1 + \frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dx}$$

$$\xrightarrow{\times 2p^2} 2p^3 = (p^3 - p) + x(p^2+1)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow 2p^3 = p(p^2-1) + x(p^2+1)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow p^3 + p = x(p^2+1)\frac{dp}{dx}$$

$$\rightarrow p(p^2+1) = x(p^2+1)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow p = x\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln|p| = \ln|x| + \ln|c| = \ln|cx|$$

$$\Rightarrow \boxed{p = \pm cx} = c_1x \rightarrow y' = c_1x$$

$$\Rightarrow y = \frac{c_1}{2}x^2 + c_2 = c_3x^2 + c_2$$

$$y = \frac{1}{2}x\left(p - \frac{1}{p}\right) \text{ در رابطه } p = cx$$

با جایگذاری داریم

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x\left(c_1x - \frac{1}{c_1x}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{2y = c_1x^2 - \frac{1}{c}}$$

Scanned by CamScanner

معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$y = xy' + x^2 y'^3$$

$$\xrightarrow{y'=p} y = xp + x^2 p^3 \longrightarrow dy = (p + 2xp^3)\,dx + (x + 3x^2p^2)\,dp$$

$$\longrightarrow \frac{dy}{dx} = (p + 2xp^3) + (x + 3x^2p^2)\frac{dp}{dx}$$

$$\longrightarrow p = p + 2xp^3 + (x + 3x^2p^2)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow -2xp^3 = (x + 3x^2p^2)\frac{dp}{dx} \longrightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{x + 3x^2p^2}{-2xp^3}$$

$$\Rightarrow -2xp^3\,dx = (x + 3x^2p^2)\,dp$$

$$\Rightarrow -2p^3\,dx = (1 + 3xp^2)\,dp$$

$$\Rightarrow +2p^3\,dx + (1 + 3xp^2)\,dp = 0$$

$$\Rightarrow +2p^3\frac{dx}{dp} + (1 + 3xp^2) = 0$$

$$\longrightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{3p^2}{2p^3}x = -\frac{1}{2p^3}$$

خطی مرتبه اول

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{3}{2}\frac{1}{p}x = -\frac{1}{2p^3}$$

جواب پارامتری

$$\begin{cases} x = p^{-3/2}\left[p^{-1/2} + c\right] \\ y = xp + x^2p^3 \end{cases}$$

$$\mu = e^{\frac{3}{2}\int \frac{dp}{p}} = e^{\frac{3}{2}\ln p} = p^{3/2}$$

$$\rightarrow x = \frac{1}{p^{3/2}}\left[\int p^{3/2}\left(-\frac{1}{2p^3}\right)dp + c\right] =$$

ادامه

جواب [illegible]

$$\Rightarrow x = p^{-3/2}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{p^{-1/2}}{-1/2} + c\right] = p^{-3/2}\left[p^{-1/2} + c\right]$$

Scanned by CamScanner

معادله زیر را حل کنید!

$y = 2xy' + y^2y'^3 \Rightarrow x = \dfrac{y - y^2y'^3}{2y'}$

$\rightarrow x = \dfrac{y - y^2p^3}{2p} \rightarrow 2x = \dfrac{y}{p} - \dfrac{y^2p^2}{1}$

$\rightarrow d(2x) = d\left(\dfrac{y}{p} - y^2p^2\right) = \left(\dfrac{1}{p} - 2yp^2\right)dy + \left(-\dfrac{y}{p^2} - 2y^2p\right)dp$

$\Rightarrow \dfrac{2\,dx}{dy} = \dfrac{1}{p} - 2yp^2 - \left(\dfrac{y}{p^2} + 2y^2p\right)\dfrac{dp}{dy}$

$\Rightarrow \dfrac{2}{p} = \dfrac{1}{p} - 2yp^2 - \left(\dfrac{y}{p^2} + 2y^2p\right)\dfrac{dp}{dy}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{p} + 2yp^2 = -y\left(\dfrac{1}{p^2} + 2yp\right)\dfrac{dp}{dy}$

$\Rightarrow p\left(\dfrac{1}{p^2} + 2yp\right) = -y\left(\dfrac{1}{p^2} + 2yp\right)\dfrac{dp}{dy}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{p^2} + 2yp = 0$ یا $p = -y\dfrac{dp}{dy} \rightarrow p\,dy = -y\,dp$

$\Rightarrow p\,dy + y\,dp = 0 \rightarrow d(py) = 0 \rightarrow py = c \rightarrow$

$p = \dfrac{c}{y} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{c}{y}$

$\rightarrow y\,dy = c\,dx$

$\rightarrow y^2/2 = cx + c_1$

$\dfrac{1}{p^2} + 2yp = 0$

$\Rightarrow 1 + 2yp^3 = 0$

$\Rightarrow p^3 = -\dfrac{1}{2y} \rightarrow p = \left(-\dfrac{1}{2y}\right)^{1/3}$

$\rightarrow y' = -y^{-1/3} \times 2^{-1/3}$

$\rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -y^{-1/3} \times 2^{-1/3}$

$\rightarrow 2^{1/3}y^{1/3}\,dy = -dx$

$\rightarrow \dfrac{2^{1/3}y^{4/3}}{4/3} = -x + c$

$2^{1/3}y^{1/3}\,dy = dx$

$\rightarrow \dfrac{2^{1/3}y^{4/3}}{4/3} = x + c$

$\Rightarrow \dfrac{3}{4} \times 2^{1/3}y^{4/3} = (x + c)$

به توان 3

$\rightarrow \left(\dfrac{3}{4}2^{1/3}y^{4/3}\right)^3 = (x + c)^3$

$\rightarrow \dfrac{27 \times 2y^4}{4^3} = (x + c)^3$

$\rightarrow 27y^4 = 32(x + c)^3$ جواب

Scanned by CamScanner

نقطه ای منفرد را حاصل کنید.

$y = xy' + y'^3$

$\to x = \frac{y - y'^3}{y'} = \frac{y}{y'} - y'^2$

$y' = p \to x = \frac{y}{p} - p^2 \quad f(y,p)$

$\to dx = f_y dy + f_p dp$

$\to dx = \frac{1}{p} dy + (-\frac{y}{p^2} - 2p) dp$

$\to \frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} - (\frac{y}{p^2} + 2p) \frac{dp}{dy}$

$\to \frac{1}{p} = \frac{1}{p} - (\frac{y}{p^2} + 2p) \frac{dp}{dy}$

$\Rightarrow (\frac{y}{p^2} + 2p) \frac{dp}{dy} = 0$

$\Rightarrow \frac{dp}{dy} = 0 \to p = c \to y' = c \to y = cx + c_1$

$\frac{y}{p^2} + 2p = 0 \to y + 2p^3 = 0 \to y = -2p^3$

$\Rightarrow -\frac{y}{2} = p^3 \to p = (-y/2)^{1/3}$

$\to y' = -(y/2)^{1/3}$

$\to \frac{dy}{dx} = -(y/2)^{1/3}$

$\to -(\frac{y}{2})^{-1/3} dy = dx$

$\to -2^{1/3} y^{-1/3} dy = dx$

$\to \frac{-2^{1/3} y^{2/3}}{2/3} = x + c$

$\to -\frac{3}{2} \times 2^{1/3} y^{2/3} = x + c$

$\to -\frac{3}{2^{2/3}} y^{2/3} = x + c$

$\to -3 y^{2/3} = 2^{2/3}(x + c)$

3 توان

$\to -(3y^{2/3})^3 = (2^{2/3}(x+c))^3$

$\to -27y^2 = 4(x+c)^3$

$\to 27y^2 + 4(x+c)^3 = 0$

جواب

$y = xy' + y'^3$

$y = xp + p^3 = p(x + p^2) \quad f(x,p)$

$\to dy = f_x dx + f_p dp$

$\to dy = p\,dx + (x + 3p^2) dp$

تقسیم بر dx: $\frac{dy}{dx} = p + (x + 3p^2) \frac{dp}{dx}$

طرفین حذف می‌شوند: $(x + 3p^2) \frac{dp}{dx}$

$\to x + 3p^2 = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{dp}{dx} = 0$

$y' = c \to y = c_1 x + c_2$

$x + 3p^2 = 0$

$\to 3p^2 = -x$

$\to p^2 = -\frac{x}{3}$

$\to p = \sqrt{-\frac{1}{3}x}$

$y = xp + p^3 = p(x + p^2)$

$\to y^2 = p^2 (x + p^2)^2$

$\to y^2 = -x/3 \, (x - \frac{x}{3})^2$

$\to y^2 = -x/3 \, (\frac{2}{3}x)^2$

$\to y^2 = \frac{-4x^3}{27}$

$\to 27y^2 + 4x^3 = 0$

Scanned by CamScanner

معادله زیر را حل کنید $2y'' = (y')^3 \sin(2x), \quad y(0) = y'(0) = 1$

معادله فاقد y است.

$y' = p \rightarrow 2p' = p^3 \sin(2x)$

$\rightarrow \frac{2dp}{dx} = p^3 \sin(2x)$

$\rightarrow \frac{2dp}{p^3} = \sin(2x)dx \rightarrow \int \frac{2dp}{p^3} = \int \sin(2x)dx + c$

$\rightarrow -\frac{1}{p^2} = -\frac{1}{2}\cos(2x) + c$

$y'(0) = 1 \rightarrow -\frac{1}{1^2} = -\frac{1}{2}(1) + c \rightarrow c = -\frac{1}{2}$

$\rightarrow -\frac{1}{p^2} = -\frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{p^2} = \frac{1+\cos 2x}{2} = \cos^2 x$

$\rightarrow p^2 = \sec^2 x \rightarrow p = \pm \sec x$

$\rightarrow y' = \pm \sec x \rightarrow y = \int \pm \sec x \, dx + c$

$\rightarrow y = \pm \ln|\sec x + \tan x| + c$

$\rightarrow y(0) = 1 \rightarrow c = 0$

$\rightarrow y = \pm \ln|\sec x + \tan x|$

مثال: $x(y')^2 - 2yy' - x = 0$ را حل کنید. از معادله بالا y را بر حسب بقیه یا x را بر حسب بقیه به دست آورید.

$2yy' = xy'^2 - x = x(y'^2 - 1)$

$\rightarrow y = \frac{x(y'^2-1)}{2y'} = \frac{x(p^2-1)}{2p} = \frac{1}{2}x\left(p - \frac{1}{p}\right)$ ← $f(x,p)$

نسبت به x مشتق می‌گیریم

$\rightarrow dy = f_x dx + f_p dp$

$\Rightarrow dy = \frac{1}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right)dx + \frac{1}{2}x\left(1 + \frac{1}{p^2}\right)dp$

Scanned by CamScanner

معادله زیر را حل کنید.

$3y'y'' - (y')^3 + 1 = 0$

معادله فاقد x است.

$y' = p, \quad y'' = p\dfrac{dp}{dy}$

$\rightarrow 3p \cdot p\dfrac{dp}{dy} - p^3 + 1 = 0$

$\Rightarrow 3p^2\dfrac{dp}{dy} - p^3 + 1 = 0 \rightarrow 3p^2 dp = (p^3 - 1)\,dy$

$\rightarrow \dfrac{3p^2}{p^3-1}dp = dy$

$\Rightarrow \int \dfrac{3p^2}{p^3-1}dp = \int dy + c$

$\Rightarrow \ln|p^3 - 1| = y + c$

$\Rightarrow |p^3 - 1| = e^{y+c} \rightarrow p^3 - 1 = \underbrace{\pm e^{c}}_{c_1} e^{y}$

$\Rightarrow p^3 = 1 + c_1 e^{y} \rightarrow p = (1 + c_1e^{y})^{1/3}$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = (1 + c_1e^{y})^{1/3} \rightarrow (1 + c_1e^{y})^{-1/3}dy = dx$

1) $y = xy' + \ln y'$
2) $y = xy' + y'^3$
3) $x = \dfrac{y}{y'} + \ln y'$
4) $x = \dfrac{y}{y'} + \dfrac{1}{y'} + y'$

$\Rightarrow \int (1 + c_1e^{y})^{-1/3}dy = x + c_2$

$I = \int (1 + c_1e^{y})^{-1/3}dy = ?$

$1 + c_1e^{y} = u^3 \rightarrow c_1e^{y}dy = 3u^2du$

$\rightarrow c_1e^{y} = u^3 - 1$

$\rightarrow dy = \dfrac{3u^2du}{u^3-1}$

$\Rightarrow I = \int (u^3)^{-1/3} \cdot \dfrac{3u^2}{u^3-1}du = \int \dfrac{3u}{u^3-1}du \overset{\text{تجزیه کسر}}{=} \ln|u-1| - \frac{1}{2}\ln|u^2+u+1| + \sqrt{3}\arctan\left(\dfrac{(2u+1)\sqrt{3}}{3}\right)$

~~Gal~~ $, u = (1 + c_1e^{y})^{1/3}$

$x = \ln y' + yy' \rightarrow ?$

مثال: معادلات زیر را حل کنید

(۲) $yy''+(y')^3=0$, $y\neq 0$

$y'=P \rightarrow y\cdot P\frac{dP}{dy}+P^3=0 \rightarrow P\left(y\frac{dP}{dy}+P^2\right)=0$

$\rightarrow P=0 \rightarrow y'=0 \rightarrow \boxed{y=C_1}$

$y\frac{dP}{dy}+P^2=0 \rightarrow y\frac{dP}{dy}+P^2=0 \rightarrow y\,dP+P^2dy=0$

$\rightarrow \frac{dP}{P^2}+\frac{dy}{y}=0$

$\rightarrow -\frac{1}{P}+\ln|y|=C$

$\rightarrow -\frac{1}{y'}+\ln|y|=C$

$\rightarrow -\frac{dx}{dy}+\ln|y|=C \rightarrow -dx+(\ln|y|-C)dy=0$

$\xrightarrow{y>0} (\ln y-C)dy - dx=0$

$\rightarrow -\int dx+\int(\ln y-C)dy=C_1$

$\rightarrow -x+y(\ln y-1)-Cy=C_1$

$\rightarrow \boxed{-x+y(\ln y-1-C)=C_1}$ جواب

حالت کلی

$y''-(f(y))y'^2=y'\sin y'$

$P\frac{dP}{dy}-(f(y))P^2=P\sin P$

$\frac{dP}{dy}-(f(y))P=\sin P$

$y^2y'y''+1=0 \rightarrow y^2y'y''=-1 \rightarrow y^2P\cdot P\frac{dP}{dy}=-1$

$\begin{cases} y^2y'y''+1=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=\sqrt[3]{3} \end{cases}$

$\rightarrow y^2P^2\frac{dP}{dy}=-1$

$\rightarrow P^2dP=-\frac{dy}{y^2}$

$\rightarrow \frac{P^3}{3}=\frac{1}{y}+C$

$\rightarrow P^3=\frac{3}{y}+C_1$, $C_1=3C$

$\rightarrow P=\sqrt[3]{\frac{3}{y}+C_1} \rightarrow y'=\sqrt[3]{\frac{3}{y}+C_1}$

حالت خاص

$y''y'y''=-1$

$y(0)=1$

$y'(0)=1$

Scanned by CamScanner

$\rightarrow y'(0) = \sqrt[3]{\frac{3}{y(0)} + C_1}$

$\rightarrow \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{\frac{3}{1} + C_1} \rightarrow C_1 = 0$

$\rightarrow y' = \sqrt[3]{\frac{3}{y}} = \sqrt[3]{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{3} \cdot y^{-1/3}$

$\rightarrow y^{1/3} dy = \sqrt[3]{3}\, dx$

$\frac{y^{1+1/3}}{1+1/3} = \sqrt[3]{3}\, x + C_2$

$\rightarrow \frac{3}{4} y^{4/3} = \sqrt[3]{3}\, x + C_2$

$\rightarrow y^{4/3} = \frac{4}{3}(\sqrt[3]{3}\, x + C_2)$

$\rightarrow y = \left(\frac{4}{3}(\sqrt[3]{3}\, x + C_3)\right)^{\frac{3}{4}}$

$y(0) = 1 \rightarrow C = \frac{3}{4}$

$\rightarrow y = \left(\frac{4}{3}\sqrt[3]{3}\, x + 1\right)^{\frac{3}{4}}$

$y = \left(\frac{4}{3}\sqrt[3]{3}\, x + 1\right)^{\frac{3}{4}}$

مثال

$yy' + (y')^2 + y + y' = 0$

$y' = P \rightarrow yP + P^2 + P + y = P(P+y) + P + y = (P+1)(P+y) = 0$

$\rightarrow P + 1 = 0 \rightarrow P = -1 \rightarrow y' = -1 \rightarrow y_1 = -x + C_1$

$P + y = 0 \rightarrow y' + y = 0 \rightarrow y' = -y \rightarrow y_2 = C_2 e^{-x}$

جواب کلی

$y = -x + C_1 \rightarrow y + x + C_1 = 0$

$y = Ce^{-x} \rightarrow y - C_2 e^{-x} = 0$

$\xrightarrow{\text{جواب}} (y + x + C_1)(y - C_2 e^{-x}) = 0$ جواب

$yy' + y'y'' + y + y'' = 0 \longrightarrow (y'+1)(y+y'') = 0$

$y(0) = 0$

$y'(0) = +1$

$y' = P \rightarrow (P+1)(y + P\frac{dP}{dy}) = 0$

$\rightarrow P = -1 \rightarrow y' = -1 \rightarrow y = -x + C_1$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(p-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}x\left(1+\frac{1}{p^2}\right)dp$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{2}\left(p-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}x\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dx}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{2}x\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dx}$$

$$\xrightarrow{\times p^2} \frac{1}{2}p^2\left(p+\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{2}xp^2\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dx}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}p(p^2+1) = \frac{1}{2}x(1+p^2)\frac{dp}{dx}$$

$$\rightarrow p = x\frac{dp}{dx}$$

$$\rightarrow p\,dx = x\,dp$$

$$\rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \rightarrow \ln|p| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\rightarrow \ln|p| = \ln|cx|$$

$$\rightarrow |p| = |cx|$$

$$\rightarrow p = \pm c x \quad (\pm c = c_1)$$

$$\rightarrow p = c_1 x$$

$$\rightarrow y' = c_1 x$$

$$\rightarrow y = \frac{c_1}{2}x^2 + c_2$$

~~$y'y'' - yy' = y'^3 + 1$~~

معادله زیر را حل کنید $\quad yy'' - y'^2 = yy'(y^3+y)$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 4/3 \end{cases}$$

x ندارد

$$\left.\begin{array}{l} y' = p \\ y'' = p\frac{dp}{dy}\end{array}\right\} \rightarrow \text{~~}p\cdot p\frac{dp}{dy} - yp = p^3+1\text{~~}$$

$$\Rightarrow \text{~~}p^2\frac{dp}{dy} - p\text{~~}$$

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 = yp(y^3+y)$$

$$\rightarrow y\frac{dp}{dy} - p = y(y^3+y)$$

خطی مرتبه اول

$$\rightarrow \frac{dp}{dy} - \frac{1}{y}p = y^3+y$$

$$\mu = e^{\int -\frac{1}{y}dy} = e^{-\ln|y|} = e^{\ln|y|^{-1}} = |y|^{-1} = \frac{1}{y}$$

$$\rightarrow p = \frac{1}{\frac{1}{y}}\left[\int \frac{1}{y}(y^3+y)dy + c\right] = y\left[\frac{y^3}{3}+y\right] + c$$

$$\left.\begin{array}{l} y'(0) = 4/3 \\ y(0) = 1\end{array}\right\} \rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow p = y\left(y^3/3 + y\right)$$

$$\Rightarrow y' = y^2\left(\frac{y^2}{3}+1\right)$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = y^2\left(y^2/3+1\right)$$

$$\rightarrow 3\,dy = y^2(y^2+3)dx$$

$$\rightarrow \frac{3\,dy}{y^2(y^2+3)} = dx \rightarrow \int\frac{3\,dy}{y^2(y^2+3)} = \int dt + c$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{y} - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctg\left(\frac{\sqrt{3}y}{y}\right) + c$$

چند مثال حل شده مهم

!

Scanned by CamScanner

$2x^2y'' + 3xy' - 3y = 2x^3$ $\qquad z = \ln x$

$P_r(r) = 2r(r-1) + 3r - 3 = 2r^2 + r - 3$, $\to x = e^z$

معادله با ضرایب ثابت تبدیل $\to$ $2\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dy}{dz} - 3y = 2e^{3z}$, $r = 1, -3/2$

$2y'' + y' - 3y = 2e^{3z}$

معادله با ضرایب ثابت متغیر

جواب همگن

$y_1 = e^{rz} = e^{1z} = e^{\ln x} = x$

$y_2 = e^{-3/2 z} = e^{-3/2 \ln x} = x^{-3/2}$

مشتقات نسبت به z

مشتق نسبت z

$y_p = Ae^{3z}$

$y_p' = 3Ae^{3z}$ $\longrightarrow 2y_p'' + y_p' - 3y_p = 2e^{3z}$

$y_p'' = 9Ae^{3z}$

$\to 2(9Ae^{3z}) + 3Ae^{3z} - 3Ae^{3z} = 2e^{3z}$

$\to 18Ae^{3z} = 2e^{3z}$

$\to A = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$

$y_p = \frac{1}{9}e^{3z} = \frac{1}{9}e^{3(\ln x)} = \frac{1}{9}x^3$

Scanned by CamScanner

جدید
معادله‌ها

$x = yy' + \ln y'$ یا $yy' + \frac{1}{y'}$

$y = xy' + \ln y'$ یا $xy' + \frac{1}{y'}$

$y = xy' + \ln y' + \frac{1}{y'} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \\ y = \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}\right)p + \ln p + \frac{1}{p} \end{cases}$

$\rightarrow \frac{1}{p} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4x}}{2}$

را بر حسب x نمی‌توان نوشت

جواب

$x = \frac{y}{y'} + \ln y' + y'^2 \rightarrow \begin{cases} y = p + 2p^3 \\ x = 1 + 2p + \ln p + p^2 \end{cases}$

تحلیلی پارامتری جواب

نوع را $y = xy' + \ln y' + \frac{1}{y'}$ حل کنید.

$y = xy' + \ln y' + \frac{1}{y'}$

$y' = p \rightarrow y = xp + \ln p + \frac{1}{p} \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} dy = p\,dx + \left(x + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\right)dp$

تقسیم بر dx

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = p + \left(x + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dx} \rightarrow \left(x + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dx} = 0$

$\rightarrow \frac{dp}{dx} = 0 \rightarrow p = c_1 \rightarrow y' = c_1 \rightarrow y = c_1 x + c_2$

جواب $\rightarrow y = xc_1 + \ln c_1 + \frac{1}{c_1}$

یا

$x + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = 0 \rightarrow x = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \rightarrow y = xy' + \ln y' + \frac{1}{y'} = xp + \ln p + \frac{1}{p}$

$\rightarrow y = \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}\right)p + \ln p + \frac{1}{p}$

جواب پارامتری

$\rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \\ y = \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}\right)p + \ln p + \frac{1}{p} \end{cases}$

معادلات لاگرانژ را بر حسب x نمی‌شه درآورد.

$$x=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p} \rightarrow \frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}-x=0$$

$$\Delta = 1-4(1)(-x) = 1+4x$$

$$\rightarrow \frac{1}{p} = \frac{1\pm\sqrt{1+4x}}{2} \rightarrow p = \frac{2}{1\pm\sqrt{1+4x}}$$

$$\rightarrow y = xp+\frac{1}{p}+\ln p = x\left(\frac{2}{1\pm\sqrt{1+4x}}\right)+\frac{1\pm\sqrt{1+4x}}{2}+\ln\left(\frac{1\pm\sqrt{1+4x}}{2}\right)$$

$$x=\frac{y}{y'}+\ln y'+y'^2$$ معادله زیر را حل کنید.

$$y'=p \rightarrow x=\frac{y}{p}+\ln p+p^2 \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} dx=\frac{1}{p}dy+\left(\frac{y}{-p^2}+\frac{1}{p}+2p\right)dp$$

تقسیم بر dy

$$\rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}+\left(\frac{y}{-p^2}+\frac{1}{p}+2p\right)\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}$$

$$\rightarrow \left(\frac{y}{-p^2}+\frac{1}{p}+2p\right)\frac{dp}{dy}=0 \rightarrow \frac{dp}{dy}=0 \rightarrow p=c \rightarrow y'=c$$

$$x=\frac{y}{c}+\ln c+c^2$$ جواب

$$\frac{y}{-p^2}+\frac{1}{p}+2p=0 \rightarrow \frac{y}{p^2}=2p+\frac{1}{p} \rightarrow y=2p^3+p$$

$$\rightarrow x=\frac{2p^3+p}{p}+\ln p+p^2 = 2p^2+1+\ln p+p^2 = 3p^2+\ln p+1$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=3p^2+\ln p+1 \\ y=2p^3+p \end{cases}$$

۹۷/۵/۲۲ آخرین ترم تابستان ۹۷

روز دوشنبه

$$x=\frac{y}{y'}+\frac{1}{y'}+y'$$

۹۸/۴/۹

$$\rightarrow \begin{cases} x=\frac{y}{p}+\frac{1}{p}+p \\ y=p^2-1 \end{cases}$$

جواب

شکل پارامتری

فرم جواب

$$y = x\left(y' + \frac{1}{y'}\right) + \frac{y'^2}{2}$$ ۱۳۹۸/۸/۲۴

$$y' = p \rightarrow \frac{dx}{dp} + \left(p - \frac{1}{p}\right)x = -p^2$$

$$\mu = e^{\int p - \frac{1}{p}\,dp} = e^{\frac{p^2}{2}}\,\frac{1}{p} = \frac{1}{p}e^{\frac{p^2}{2}}$$

$$x = \frac{1}{\frac{1}{p}e^{p^2/2}}\left[\int \frac{1}{p}\left(e^{\frac{p^2}{2}}\right)\cdot -p^2\,dp + c\right]$$

$$= pe^{-\frac{p^2}{2}}\left[-\int pe^{\frac{p^2}{2}}dp + c\right] = pe^{-\frac{p^2}{2}}\left[-e^{\frac{p^2}{2}} + \ldots\right]$$

$$= -p + pce^{-\frac{p^2}{2}}$$

$$\begin{cases} x = -p + pce^{-\frac{p^2}{2}} \\ y = x\left(p + \frac{1}{p}\right) + \frac{p^2}{2} \end{cases}$$ ۱۳۹۸/۸/۲۴

$$\rightarrow y = x\left(2y' - \frac{1}{y'}\right) + y'^2, \quad y' = p$$

$$\rightarrow y = x\left(2p - \frac{1}{p}\right) + p^2 \rightarrow dy = \left(2p - \frac{1}{p}\right)dx + \left(x\left(2 + \frac{1}{p^2}\right) + p\right)dp$$

$$\xrightarrow{dx \text{ تقسیم بر}} \frac{dy}{dx} = 2p - \frac{1}{p} + \left(x\left(2 + \frac{1}{p^2}\right) + p\right)\frac{dp}{dx}$$

$$\rightarrow -\left(p - \frac{1}{p}\right) = \left(x\left(2 + \frac{1}{p^2}\right) + p\right)\frac{dp}{dx} \rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{x\left(2 + \frac{1}{p^2}\right) + p}{-(p - 1/p)}$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{2 + \frac{1}{p^2}}{p - \frac{1}{p}}x = \frac{p}{\frac{1}{p} - p} \rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{2p^2 + 1}{p^3 - p}x = \frac{p^2}{1 - p^2}$$

$$\mu = e^{\int \frac{2p^2+1}{p^3-p}dp}, \quad \frac{2p^2+1}{p^3-p} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p+1} = \frac{-1}{p} + \frac{\frac{3}{2}}{p-1} + \frac{\frac{3}{2}}{p+1}$$

$$\rightarrow \mu = e^{-\ln p + \frac{3}{2}\ln(p^2-1)} = \frac{1}{p}(p^2-1)^{3/2}, \quad x = \frac{p}{(p^2-1)^{3/2}}\left[\int \frac{1}{p}\cdot(p^2-1)^{3/2}\left(\frac{-p^2}{p^2-1}\right)dp + c\right]$$

$$= \frac{p}{(p^2-1)^{3/2}}\left[-\int p\sqrt{p^2-1}\,dp + c\right]$$

$$= \frac{p}{(p^2-1)^{3/2}}\left[\frac{1}{2}\,\frac{(p^2-1)^{3/2}}{3/2} + c\right]$$

۱۳۹۸/۸/۱۶

Scanned by CamScanner

$x+eV=y$

دسته منحنی‌های متعامد بر دسته منحنی‌های زیر را بدست آورید

$$(x-c)^2+(y-c)^2=2c^2$$

$$\rightarrow x^2+y^2-2c(x+y)=0 \rightarrow r^2-2cr(\cos\theta+\sin\theta)=0$$

$$\rightarrow r-2c(\cos\theta+\sin\theta)=0$$

$$\rightarrow r=2c(\sin\theta+\cos\theta)$$

$$\rightarrow r'=2c(\cos\theta-\sin\theta)$$

معادله دیفرانسیل دسته منحنی

$$\rightarrow \frac{r}{r'}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$

$$\rightarrow \frac{-r'}{r}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta} \rightarrow \frac{r'}{r}=-\frac{(\sin\theta+\cos\theta)}{\cos\theta-\sin\theta}$$

$$\rightarrow \int\frac{r'}{r}d\theta=\int\frac{-(\sin\theta+\cos\theta)}{\cos\theta-\sin\theta}d\theta+\ln|c|$$

$$\rightarrow \ln|r|=\ln|\cos\theta-\sin\theta|+\ln|c|$$

$$\rightarrow \ln|r|=\ln|c(\cos\theta-\sin\theta)| \rightarrow r=\pm c(\cos\theta-\sin\theta)$$

$\pm c \Leftrightarrow 2c$

$$\rightarrow r=2c(\cos\theta-\sin\theta) \rightarrow r^2=2rc(\cos\theta-\sin\theta)$$

$$\rightarrow x^2+y^2=2c(x-y) \rightarrow x^2+y^2-2cx+2cy=0$$

$$\rightarrow x^2+y^2-2cx+c^2+2cy+c^2=2c^2$$

$$\rightarrow (x-c)^2+(y+c)^2=2c^2$$ دسته منحنی

حل از طریق صریح

$$x^2+y^2-2c(x+y)=0$$

$$\rightarrow 2c=\frac{x^2+y^2}{x+y} \rightarrow 0=\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)'$$

$$\rightarrow 0=\frac{(2x+2yy')(x+y)-(1+y')(x^2+y^2)}{(x+y)^2}=0$$

$$\rightarrow (2x+2yy')(x+y)-(1+y')(x^2+y^2)=0$$ معادله دیفرانسیل دسته منحنی

Scanned by CamScanner

$$\left(2x+\frac{2y}{-y'}\right)(x+y)-\left(1-\frac{1}{y'}\right)(x^2+y^2)=0$$ [illegible]

$$\left(-\frac{1}{y'}\right)\left(2y(x+y)-(x^2+y^2)\right)+2x(x+y)-(x^2+y^2)=0$$

$$\rightarrow \frac{-1}{y'}(y^2-x^2+2xy)+x^2-y^2+2xy=0$$

$$\rightarrow \frac{1}{y'}(y^2-x^2+2xy)=x^2-y^2+2xy$$

$$\rightarrow \frac{1}{y'}=\frac{x^2-y^2+2xy}{y^2-x^2+2xy}\rightarrow y'=\frac{y^2-x^2+2xy}{x^2-y^2+2xy}$$

$$y=vx\rightarrow y'=v'x+v$$

$$\rightarrow v'x+v=\frac{v^2-1+2v}{1-v^2+2v}\rightarrow$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2-1+2v}{1-v^2+2v}-\frac{v}{1}=\frac{v^2-1+2v-v+v^3-2v^2}{1-v^2+2v}=\frac{v^3-v^2+v-1}{1-v^2+2v}$$

$$\rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2(v-1)+(v-1)}{1-v^2+2v}\rightarrow \frac{1-v^2+2v}{(v-1)(v^2+1)}dv=\frac{dx}{x}$$

$$\rightarrow \int\frac{1-v^2+2v}{(v-1)(v^2+1)}dv=\int\frac{dx}{x}+\ln|c|$$

$$\rightarrow \frac{A}{v-1}+\frac{Bv+C}{v^2+1}=\frac{1-v^2+2v}{(v-1)(v^2+1)}\rightarrow A=1,\ B=-2,\ C=0$$

$$\rightarrow \int\left(\frac{1}{v-1}+\frac{-2v}{v^2+1}\right)dv=\ln|cx|\rightarrow \ln\left|\frac{v-1}{v^2+1}\right|=\ln|cx|$$

$$\rightarrow \left|\frac{v-1}{v^2+1}\right|=|cx|\rightarrow \frac{v-1}{v^2+1}=\pm c\,x=cx$$

$$\rightarrow \frac{\frac{y}{x}-1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}=cx\rightarrow \frac{y-x}{\frac{y^2}{x}+x}=cx\rightarrow y-x=(y^2+x^2)c$$

Scanned by CamScanner

$$C \Leftrightarrow \frac{1}{2C} \Rightarrow y - x = \frac{1}{2C}(x^2 + y^2)$$

$$\longrightarrow x^2 + y^2 + 2C(x - y) = 0$$

$$\longrightarrow x^2 + 2Cx + C^2 + y^2 - 2Cy + C^2 = 2C^2$$

$$\longrightarrow (x + C)^2 + (y - C)^2 = 2C^2$$

دسته منحنی

$$C \Leftrightarrow -C \longrightarrow (x - C)^2 + (y + C)^2 = 2C^2$$

Scanned by CamScanner

$f(p) - p = -\operatorname{tg} p \rightarrow f(p) = p - \operatorname{tg} p$

$\Rightarrow \qquad g(p) = \sin p \pm \cos p$:مثال

حل $y = x f(y') + g(y') \rightarrow y = x(y' - \operatorname{tg} y') + \sin y'$ مثال

$y' = p \rightarrow y = x(p - \operatorname{tg} p) + \sin p$

$\rightarrow dy = (p - \operatorname{tg} p)\,dx + (x(1 - 1 - \operatorname{tg}^2 p) + \cos p)\,dp$

تقسیم بر dx

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = p - \operatorname{tg} p + (-x \operatorname{tg}^2 p + \cos p)\frac{dp}{dx}$

$\rightarrow p = p - \operatorname{tg} p + (-x \operatorname{tg}^2 p + \cos p)\frac{dp}{dx}$

$\rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{-x \operatorname{tg}^2 p + \cos p}{\operatorname{tg} p} \Rightarrow \frac{dx}{dp} + (\operatorname{tg} p)x = \frac{\cos p}{\operatorname{tg} p}$

خطی مرتبه اول

$\mu = e^{\int \operatorname{tg} p\,dp} = e^{-\ln|\cos p|} = \frac{1}{\cos p}$

$x = \frac{1}{\frac{1}{\cos p}}\left[\int \frac{1}{\cos p}\left(\frac{\cos p}{\operatorname{tg} p}\right)dp + c\right] = \cos p\left[\int \frac{\cos p}{\sin p}\,dp + c\right]$

$\rightarrow x = \cos p\left[\ln|\sin p| + c\right]$

شکل پارامتری جواب

$$\begin{cases} x = \cos p(\ln|\sin p| + c) \\ y = x(p - \operatorname{tg} p) + \sin p \end{cases}$$

۱۴۰۲/۱/۱۵/۱۸

$f(p)-p=p\ln p \rightarrow \int \frac{1}{f(p)-p}dp=\ln(\ln p)$ مثال حل شده

$\rightarrow f(p)=p+p\ln p$, $g(p)=\ln p$

$\rightarrow y=x(y'+y'\ln y')+\ln y'$

$y'=p \rightarrow y=x(p+p\ln p)+\ln p$

$\rightarrow dy=(p+p\ln p)dx+\left(x(1+1+\ln p)+\frac{1}{p}\right)dp$

$\rightarrow \frac{dy}{dx}=p+p\ln p+\left(x(2+\ln p)+\frac{1}{p}\right)dp/dx$

$\rightarrow -p\ln p=\left(x(2+\ln p)+\frac{1}{p}\right)\frac{dp}{dx}$

$\rightarrow \frac{dx}{dp}=-\frac{x(2+\ln p)+\frac{1}{p}}{p\ln p}=\frac{2+\ln p}{-p\ln p}-\frac{\frac{1}{p}}{p\ln p}$

$\rightarrow \frac{dx}{dp}+\left(\frac{2}{p\ln p}+\frac{1}{p}\right)x=\frac{-1}{p^2\ln p}$ خطی مرتبه اول

$\mu=e^{\int\left(\frac{2}{p\ln p}+\frac{1}{p}\right)dp}=e^{2\ln(\ln p)+\ln p}=(\ln p)^2 p$

$\rightarrow \mu=p(\ln p)^2$

$\rightarrow x=\frac{1}{p(\ln p)^2}\left[\int p(\ln p)^2\left(\frac{-1}{p^2\ln p}\right)dp+c\right]$

$=\frac{1}{p(\ln p)^2}\left[\int \frac{-\ln p}{p}dp+c\right]$

$=\frac{1}{p(\ln p)^2}\left[-\frac{(\ln p)^2}{2}+c\right]=\frac{-1}{2p}+c/p(\ln p)^2$

Scanned by CamScanner

جواب کلی به صورت پارامتری →

$$\begin{cases} x = \dfrac{-1}{2p} + \dfrac{C}{p(\ln p)^2} \\ y = x(p + p\ln p) + \ln p \end{cases}$$

$$\frac{1}{f(p)-p} = \frac{2p}{p^2+1}$$

$\rightarrow f(p) - p = \dfrac{p^2+1}{2p} = \dfrac{1}{2}\left(p + \dfrac{1}{p}\right) \rightarrow f(p) = p + \dfrac{1}{2}\left(p + \dfrac{1}{p}\right) = \dfrac{3}{2}p + \dfrac{1}{2p}$

$\rightarrow g(p) = \dfrac{1}{p^2+1}$

$$\rightarrow y = x\left(\frac{3}{2}y' + \frac{1}{2y'}\right) + \frac{1}{y'^2+1}$$

$\rightarrow y = x\left(\dfrac{3}{2}p + \dfrac{1}{2p}\right) + \dfrac{1}{p^2+1}$

$\rightarrow dy = \left(\dfrac{3}{2}p + \dfrac{1}{2p}\right)dx + \left(x\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2p^2}\right) + \dfrac{-2p}{(p^2+1)^2}\right)dp$

$\rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{2}p + \dfrac{1}{2p} + \left\{x\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2p^2}\right) - \dfrac{2p}{(p^2+1)^2}\right\}\dfrac{dp}{dx}$

$\rightarrow -\left(\dfrac{1}{2}p + \dfrac{1}{2p}\right) = \left(x\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2p^2}\right) - \dfrac{2p}{(p^2+1)^2}\right)\dfrac{dp}{dx}$

$\rightarrow -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p^2+1}{p}\right) = \left(x\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2p^2}\right) - \dfrac{2p}{(p^2+1)^2}\right)\dfrac{dp}{dx}$

$\rightarrow \dfrac{dx}{dp} = \dfrac{x\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2p^2}\right) - \frac{2p}{(p^2+1)^2}}{-\frac{1}{2}\left(\frac{p^2+1}{p}\right)} = \dfrac{\frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{p^2}\right)x}{-\frac{1}{2}\left(\frac{p^2+1}{p}\right)} + g_1(p)$

$= \dfrac{3p^2-1}{-p(p^2+1)} + g_1(p)$

Scanned by CamScanner

! بخش دوم جزوه معادلات دیفرانسیل استاد ارژنگ !

تبدیلات لاپلاس

Scanned by CamScanner

تبدیلات لاپلاس «۶ تا ۸ نمره پایان ترم» =

«یادآوری: $0! = 1$ ، $1! = 1$»

تابع گاما یا فاکتوریل Γ

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} \, dt \quad , \alpha > 0$$

$$\Gamma(5) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{4} \, dt = 4!$$

. با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء می توان نتیجه گرفت :

$$\begin{cases} \Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha) \\ \text{یا} \\ \Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) \end{cases}$$

$$\text{«} \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} \, dt \text{»} = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(5) = 4\Gamma(4) = 4\times 3\,\Gamma(3) = 4\times 3\times 2\,\Gamma(2)$$

$$= 4\times 3\times 2\times 1\times \Gamma(1) = 4\times 3\times 2\times 1 = 4!$$

($\Gamma(1) = 1$)

برای هر عدد طبیعی n داریم: $\Gamma(n) = (n-1)!$

$$\Gamma(7/2) = (7/2 - 1)\,\Gamma(7/2 - 1) = \frac{5}{2}\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2} \times \frac{3}{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}}$$

برای $\alpha > -1$ تعریف می‌کنیم:

$$\alpha! = \Gamma(\alpha + 1)$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \sqrt{\pi}$$

تبدیل لاپلاس: فرض کنید $f(t)$ تابعی پیوسته در بازه‌ی $[0, \infty)$ باشد، تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

⟸ «تابعی از s»

$= F(s)$ «به شرط همگرایی»

$L[f(t)] = F(s)$ ← قراردادی

$L[g(t)] = G(s)$

تبدیل لاپلاس خاصیت خطی دارد:

$$L[\alpha f(t) \pm \beta g(t)] = \alpha L[f(t)] \pm \beta L[g(t)]$$

لاپلاس چندجمله‌ای‌ها = $n > -1,\ s > 0$,

$$L[t^n] = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^n\,dt \xrightarrow[\text{حساب}]{\text{بعد از}} \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

$$= \boxed{\frac{n!}{s^{n+1}}}$$

Scanned by CamScanner

Subject « [redacted] »
Date « [redacted] »

ص ۴ / جلسه ۱ «تبدیل لاپلاس»

«این ۴ تا هم هستند»

- $L[1] = L[t^0] = \frac{1}{s}$
- $L[t] = \frac{1}{s^2}$
- $L[t^2] = \frac{2!}{s^3}$
- $L[t^3] = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4}$

لاپلاس معکوس =

$$(x^3)' = 3x^2 \longleftrightarrow \int 3x^2\,dx = x^3$$

$$L[f(t)] = F(s) \longleftrightarrow L^{-1}[F(s)] = f(t)$$

- هدف از محاسبه‌ی لاپلاس معکوس تابع $F(s)$ بدست آوردن تابعی مانند $f(t)$ است به طوری که لاپلاس آن برابر با $F(s)$ باشد.

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^n}\right] = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad , \quad s > 0 \ , \ n > -1$$

مهم هستن ۳ تا:

- $L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1$
- $L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = t$
- $L^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] = \frac{t^2}{2}$

Scanned by CamScanner

فرمول‌های عکس لاپلاس :

① $L[\sin(at)] = \frac{a}{s^2+a^2} \longleftrightarrow L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+a^2}\right] = \frac{1}{a}\sin(at)$

② $L[\cos(at)] = \frac{s}{s^2+a^2} \longleftrightarrow L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = \cos(at)$

③ $L[\sinh(at)] = \frac{a}{s^2-a^2} \longleftrightarrow L^{-1}\left[\frac{1}{s^2-a^2}\right] = \frac{1}{a}\sinh(at)$

④ $L[\cosh(at)] = \frac{s}{s^2-a^2} \longleftrightarrow L^{-1}\left[\frac{s}{s^2-a^2}\right] = \cosh(at)$

⑤ $L[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \longleftrightarrow L^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at}$

مثال:

1) $L[e^{2t}] = \boxed{\frac{1}{s-2}}$

2) $L[e^{-3t}] = \frac{1}{s+3} \longleftrightarrow L^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] = \boxed{e^{-3t}}$

3) $L[2\sin(3t) + 4\cos(3t)] = 2L[\sin(3t)] + 4L[\cos(3t)] = 2\times\frac{3}{s^2+3^2} + 4\times\frac{s}{s^2+3^2} = \boxed{\frac{6+4s}{s^2+9}}$

4) $L^{-1}\left[\frac{3s+5}{s^2+7}\right] = L^{-1}\left[\frac{3s}{s^2+7} + \frac{5}{s^2+7}\right] \Rightarrow L^{-1}\left[\frac{3s}{s^2+7}\right] + L^{-1}\left[\frac{5}{s^2+7}\right]$

$\Rightarrow 3L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+(\sqrt{7})^2}\right] + 5L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+(\sqrt{7})^2}\right] = 3\cos(\sqrt{7}t) + \frac{5}{\sqrt{7}}\sin(\sqrt{7}t)$

$\Rightarrow L^{-1}\left[\frac{3s+5}{s^2-7}\right] = \boxed{3\cosh(\sqrt{7}t) + \frac{5}{\sqrt{7}}\sinh(\sqrt{7}t)}$

Scanned by CamScanner

مباحثی که باید بلد باشید ← تجزیه کسرها / اتحادها / انتگرال‌گیری مقدماتی / مشتق‌گیری مقدماتی

آوردن اتحاد جمله مشترک $\Rightarrow s^2+(\alpha+\beta)s+\alpha\beta=(s+\alpha)(s+\beta)$

5) $L^{-1}\left[\dfrac{2s+3}{s^2-5s+6}\right] \Rightarrow$

$$\frac{2s+3}{s^2-5s+6}=\frac{2s+3}{(s-2)(s-3)} \Rightarrow$$

تجزیه

$$\Rightarrow \frac{A}{s-2}+\frac{B}{s-3}$$

$$\Rightarrow \frac{A(s-3)+B(s-2)}{(s-2)(s-3)} \Rightarrow 2s+3=A(s-3)+B(s-2)$$

$\Rightarrow$ بجای s ریشه‌ها را در صورت بگذارید $\longrightarrow s=2 \longrightarrow 2(2)+3=A(2-3)+B(2-2) \longrightarrow \boxed{A=-7}$

$s=3 \longrightarrow \boxed{B=9}$

$$L^{-1}\left[\frac{2s+3}{s^2-5s+6}\right]=L^{-1}\left[\frac{-7}{s-2}\right]+L^{-1}\left[\frac{9}{s-3}\right]=\boxed{-7e^{2t}+9e^{3t}}$$

تمرین:

1) $L^{-1}\left[\dfrac{s^2+s+1}{s^4-5s^2+4}\right]$

2) $L^{-1}\left[\dfrac{s^2+s+1}{s^4+5s^2+4}\right]$

3) $L^{-1}\left[\dfrac{s^2+2}{s^4-1}\right]$

Scanned by CamScanner

Subject « معادلات - لاپلاس »
Date « جلسه ۲ صف 1 »

انتقال :

لاپلاس تابع نمایی ضرب در یک تابع :

$L[f(t)] = F(s)$

$L^{-1}[F(s)] = f(t)$

1) $L[e^{at} f(t)] = L[f(t)] \Big|_{s \to s-a} = F(s-a)$

2) $L^{-1}[F(s-a)] = e^{at} f(t) = e^{at} L^{-1}[F(s)]$

مثال :

1) $L[e^{2t} \cos(3t)] = L[\cos(3t)] \Big|_{s \to s-2} = \frac{s}{s^2+9} \Big|_{s \to s-2} =$

$= \frac{s-2}{(s-2)^2+9} = \frac{s-2}{s^2-4s+13}$

2) $L[t^{10} e^{-3t}] = \frac{10!}{s^{11}} \Big|_{s \to s-(-3)} = \frac{10!}{(s+3)^{11}}$

یادآوری ← مربع کامل ← $s^2+As+B = s^2+As+(\frac{A}{2})^2+B-(\frac{A}{2})^2 = (s+\frac{A}{2})^2+B-(\frac{A}{2})^2$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject « معادلات _ لاپلاس »
Date « جلسه ۲ مبحث ۲ »

$*3)\ L^{-1}\left[\frac{2s+5}{s^2-6s+25}\right]$ ؛ $L^{-1}\left[\frac{2s+5}{(s-3)^2+16}\right] = L^{-1}\left[\frac{2(s-3+3)+5}{(s-3)^2+16}\right] =$

$= L^{-1}\left[\frac{2(s-3)+11}{(s-3)^2+16}\right] = e^{3t} L^{-1}\left[\frac{2s+11}{s^2+16}\right]$ «مهم»

$\Rightarrow L^{-1} \rightarrow e^{3t}\left\{L^{-1}\left[\frac{2s}{s^2+4^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{11}{s^2+4^2}\right]\right\} = e^{3t}\left\{2\cos(4t) + \frac{11}{4}\sin(4t)\right\}$

$*4)\ L^{-1}\left[\frac{s+2}{s^3-1}\right]$ ؛

یادآوری ← اتحاد چاق و لاغر ← $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\Rightarrow \frac{s+2}{s^3-1} = \frac{s+2}{(s-1)(s^2+s+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+s+1}$

$\Rightarrow \frac{A(s^2+s+1) + (Bs+C)(s-1)}{(s-1)(s^2+s+1)} = \frac{As^2+As+A+Bs^2-Bs+Cs-C}{(s-1)(s^2+s-1)}$

$\Rightarrow s+2 = A(s^2+s+1) + (s-1)(Bs+c) \Rightarrow$ $s=1 \rightarrow 3 = 3A \rightarrow A=1$

یادآوری ← $L^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at}$

$s=0 \rightarrow 2 = A-C \rightarrow C=-1$

$s=-1 \Rightarrow 1 = A-2(C-B) \rightarrow B=-1$

$\Rightarrow \frac{s+2}{s^3-1} = \frac{1}{s-1} + \frac{-s-1}{s^2+s+1} \rightarrow L^{-1}\left[\frac{s+2}{s^3-1}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - L^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2+s+1}\right]$

$= e^t - I$

$\Rightarrow L^{-1}\left[\frac{s+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right] = e^{-\frac{1}{2}t} L^{-1}\left[\frac{s+1/2}{s^2+\frac{3}{4}}\right] \Rightarrow e^{-\frac{1}{2}t}\left\{L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\right] + \frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\right]\right\}$

$\Rightarrow e^{-\frac{1}{2}t}\left\{\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right\}$

$1/\sqrt{3}$

PAPCO

Subject «معادلات لاپلاس»
Date «جلسه ۳ قسمت ۳»

تمرین: $L^{-1}\left[\frac{s-2}{s^3+1}\right]$:

تمرین: $L^{-1}\left[\frac{s^3}{s^6-64}\right]$: $s^6-64 = (s^3-8)(s^3+8) = (s-2)(s^2+2s+4)(s+2)(s^2-2s+4)$

$\rightarrow \frac{s^3}{s^6-64} = \frac{A}{s-2} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+4} + \frac{D}{s+2} + \frac{Es+F}{s^2-2s+4}$

لاپلاس چندجمله ای ضرب کردن در t^n :

$L[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$, عدد طبیعی n
← «مشتق مرتبه n ام F نسبت به s»

$n=1 \rightarrow L[t f(t)] = (-1)^1 F'(s) = -F'(s) \leftarrow L^{-1}[-F'(s)] = t f(t)$

$\rightarrow f(t) = \frac{-1}{t} L^{-1}[F'(s)] \rightarrow L^{-1}[F(s)] = \frac{-1}{t} L^{-1}[F'(s)]$

← «فرمول استفاده از مشتق در محاسبه لاپلاس معکوس.»

زمانی از این فرمول استفاده میکنیم که F(s) در ضابطه اش ln ، arctan یا s داشته باشد.

Subject «معادلات لاپلاس»

Date «جلسه ۲ سع»

مثال: $L[t^2\cos(3t)] = (-1)^2\left(\left[L[\cos(3t)]\right]\right)'' = \left(\dfrac{s}{s^2+9}\right)''$

$\Rightarrow \left(\dfrac{s^2+9-2s^2}{(s^2+9)^2}\right)' = \left(\dfrac{9-s^2}{(s^2+9)^2}\right)' = \dfrac{-2s(s^2+9)^2-2(2s)(s^2+9)(9-s^2)}{(s^2+9)^4}$

$= \dfrac{-2s(s^2+9)\{s^2+9+18-2s^2\}}{(s^2+9)^4}$

$= \dfrac{-2s(27-s^2)}{(s^2+9)^3} = \dfrac{2s^3-54s}{(s^2+9)^3}$

مثال: $L[\underbrace{e^{5t}\,t^2\cos(3t)}_{f(t)}] = F(s-5) = \dfrac{2(s-5)^3-54(s-5)}{((s-5)^2+9)^3}$

Subject: «معادلات _ دیفرانسیل»

Date: «جلسه ۳ ص 1»

$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$ # ← فرمول

$L^{-1}\{F(s)\} = \frac{-1}{t} L^{-1}\{F'(s)\}$ # ← فرمول

مثال: $L[t^{10} e^{-3t}] = (-1)^{10} [L[e^{-3t}]]^{(10)} = \left(\frac{1}{s+3}\right)^{(10)} = \frac{10!}{(s+3)^{11}}$ ← «مشتق برقرار»

$\longrightarrow L[t^{10}]\Big|_{s \to s-(-3)} = \frac{10!}{s^{11}}\Big|_{s \to s+3} = \boxed{\frac{10!}{(s+3)^{11}}}$

مثال: $L^{-1}\left[\ln\left(\frac{s^2+3}{s^2+4}\right)\right]$:

جواب: $L^{-1}\left[\ln\left(\frac{s^2+3}{s^2+4}\right)\right]$: $L^{-1}[F(s)] = \frac{-1}{t} L^{-1}[F'(s)]$

$\longrightarrow [\underbrace{\ln(s^2+3) - \ln(s^2+4)}_{F(s)}] \longrightarrow \frac{-1}{t} L^{-1}\left[\frac{2s}{s^2+3} - \frac{2s}{s^2+4}\right] \longrightarrow$

یادآوری: $L[e^{at} f(t)] = F(s-a)$

$L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = \cos(at)$

$\Longrightarrow \frac{-1}{t}\{2\cos(\sqrt{3}t) - 2\cos(2t)\} = \frac{-2}{t}\{\cos(\sqrt{3}t) - \cos(2t)\}$

Scanned by CamScanner

Subject: «معادلات لاپلاس»
Date: «جلسه ۳ مد ۲»

مثال: $L^{-1}\left[\operatorname{arctg}(s+2)-\frac{\pi}{2}\right]$:

ابتدا مشتق می‌گیریم: / $\frac{-1}{t}\,L^{-1}\left[\frac{1}{1+(s+2)^2}\right]$

$\rightarrow L^{-1}[F(s-a)]=e^{at}\,L^{-1}[F(s)]$ ← فرمول

$\rightarrow \frac{-1}{t}\,e^{-2t}\,L^{-1}\left[\frac{1}{1+s^2}\right]=-\frac{e^{-2t}\sin t}{t}$ ⇐ جواب

تمرین: ① $L^{-1}\left[\ln\left(\frac{s^2+s+1}{s^2+s+1}\right)\right]$:

② $L^{-1}\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{s}}-\frac{\pi}{2}\right]$:

* شرط وجود لاپلاس معکوس: « $\lim_{s\to+\infty}F(s)=0$ »

\# * از این ۲ فرمول حتماً در امتحان سئوال خواهد بود ←

$$\begin{cases} L[f(t)]=F(s), \\ L^{-1}[F(s)]=f(t) \end{cases} \Longrightarrow$$

$\Rightarrow L\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^{+\infty}f(u)\,du$: نتیجه فرمول بالا $\Rightarrow \frac{f(t)}{t}=\frac{L^{-1}}{1}\left[\int_s^{+\infty}f(u)\,du\right]\rightarrow$

$\Longrightarrow f(t)=t\,L^{-1}\left[\int_s^{+\infty}F(u)\,du\right]\rightarrow L^{-1}[F(s)]=t\,L^{-1}\left[\int_s^{+\infty}F(u)\,du\right]$

← فرمول استفاده از انتگرال در محاسبه لاپلاس معکوس.

PAPCO

Subject: «معادلات لاپلاس»
Date: «جلسه ۳ مدل ۳»

درمورد فرمول ۵: اغلب اوقات از این فرمول زمانی استفاده نیم که $f(s)$ به صورت کسر باشد و در مخرج آن $(s^2+a^2)^n$ را داشته باشیم.

نتیجه:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} f(s)\,ds$$

حل مسئله:

مثال: $L\left[\frac{e^{-t}\sin(2t)}{t}\right]$: $\int_s^{+\infty} F(u)\,du = \int_s^{+\infty} L\left[e^{-t}\sin(2t)\right] du \longrightarrow$ (برحسب u)

$\longrightarrow L\left[e^{-t}\sin(2t)\right] \to L\left[\sin(2t)\right]\Big|_{s\to s+1} \longrightarrow \frac{2}{s^2+2^2}\Big|_{s\to s+1} \longrightarrow$

$\longrightarrow \frac{2}{(s+1)^2+4} \longrightarrow \int_s^{+\infty} \frac{2}{(u+1)^2+4}\,du \longrightarrow$ (یادآوری: $\int \frac{dv}{v^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{v}{a}\right)$)

$\Longrightarrow \frac{2}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{u+1}{2}\right)\Big|_{u=s}^{u\to+\infty} \Longrightarrow \mathrm{arctg}(+\infty) - \mathrm{arctang}\left(\frac{s+1}{2}\right) =$

$= \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctang}\left(\frac{s+1}{2}\right) \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctang}\left(\frac{s+1}{2}\right)$

Scanned by CamScanner

Subject: معادلات - لاپلاس
Date: "جلسه ۳ ص ۴"

مثال : ★اتفاقی $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x) - \cos(3x)}{x}\, dx$:

جواب: $\int_0^{+\infty} \mathcal{L}[\cos(2x) - \cos(3x)]\, ds \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \left(\left(\frac{s}{s^2+4}\right) - \left(\frac{s}{s^2+9}\right) \right) ds \Rightarrow$$

مشتق صورت مخرج پس [ln] (خواهد بود)

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} \ln(s^2+4) - \frac{1}{2} \ln(s^2+9) \right) \Big|_{s \to 0}^{s \to +\infty} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{s^2+4}{s^2+9} \right) \Big|_{s=0}^{s \to +\infty}$$

از طریق برکران

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left\{ \ln(1) - \ln\left(\frac{4}{9}\right) \right\} = \boxed{-\frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{9}\right)}$$

(با $\ln(1) = 0$)

تمرین :

① $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$

② $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx \;,\; a>0 ,\; b>0$

③ $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(\sqrt{3}t)}{t}\, dt$:

جواب③: $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(\sqrt{3}t)}{t}\, dt = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}[e^{-t}\sin(\sqrt{3}t)\, dt]\, ds \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{(s+1)^2+3}\, ds \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{s+1}{\sqrt{3}}\right) \Big|_{s=0}^{s \to +\infty} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{\pi}{3}}$$

Scanned by CamScanner

Subject: معادلات لاپلاس
Date: جلسه ۳ ...

مثال: $L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+5)^2}\right]$
$\underbrace{\quad}_{F(s)}$

فرمول $\to L^{-1}[F(s)] = tL^{-1}\left[\int_s^{+\infty} f(u)\,du\right]$

$\Rightarrow t\,L^{-1}\left[\int_s^{+\infty} \frac{u}{(u^2+5)^2}\,du\right]$ تغییر متغیر $\int \frac{u\,du}{(u^2+5)^2}$ ، $\frac{u^2+5=v}{2u\,du=dv}$

$\to \int \frac{\frac{1}{2}dv}{v^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v^2} \to \frac{-1}{2v} = -\frac{1}{2(u^2+5)} \Rightarrow$

$\Rightarrow t\,L^{-1}\left[\left[\frac{-1}{2(u^2+5)}\right]\Big|_{u\to s}^{u\to +\infty}\right] \Rightarrow \frac{t}{2}\,L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+5}\right]$

$\Rightarrow \frac{t}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}t \to \boxed{\frac{t}{2\sqrt{5}}\sin(\sqrt{5}t)}$ ⟸ جواب

تمرین:

$L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right]$

$L^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+1)^2}\right]$

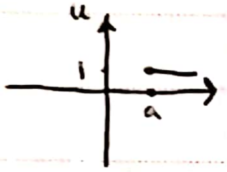
$L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2-1)^2}\right]$

Scanned by CamScanner

«لاپلاس»

- تابع پله‌ای واحد: (تابع هویسایید) ، $a \geq 0$

$$u_a(t) = \begin{cases} 1 , & t \geq a \\ 0 , & t < a \end{cases}$$



- این چند فرمول خیلی مهم هستند. معنی استدلال بیاید:

1) $L\{u_a(t)\} = \frac{1}{s} e^{-as} \quad , a \geq 0$

2) $L\{u_a(t) f(t)\} = e^{-as} L[f(t+a)]$ لاپلاس میتیم ✓*

3) $L[u_a(t) f(t-a)] = e^{-as} L[f(t)] = e^{-as} F(s)$

4) $L^{-1}[e^{-as} F(s)] = u_a(t) f(t-a)$ ✓*

یادآوری:
$$\begin{cases} L[f(t)] = F(s) \\ L^{-1}[F(s)] = f(t) \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

مثال: $L[u_{\pi}(t)\sin(\frac{t}{۲})] = e^{-\pi s} L[\sin(\frac{\pi+t}{۲})] =$

یادآوری: $L[\cos(at)] = \frac{s}{s^۲+a^۲}$

$L[\sin(at)] = \frac{a}{s^۲+a^۲}$

$= e^{-\pi s} L[\sin(\frac{t}{۲}+\frac{\pi}{۲})] =$ ($\cos(t/۲)$)

$= e^{-\pi s} L[\cos(\frac{t}{۲})] = e^{-\pi s}\frac{s}{s^۲+(\frac{۱}{۲})^۲} =$

$= e^{-\pi s}\frac{۴s}{۴s^۲+۱}$ ← جواب

*مثال: $L[u_{۳}(t)(t-۳)^۲\cos(۳t-۹)] = e^{-۳s} L[f(t+۳)] =$

یادآوری: $L[e^{at}f(t)] = F(s-a)$

$= e^{-۳s} L[t^۲\cos(۳t)] =$ «مثال جلسه قبل»

$= e^{-۳s}\left(\frac{۲s^۳-۵۴s}{(s^۲+۹)^۳}\right)$ ← جواب

مثال: $L[e^{-۵t}\underbrace{u_{۳}(t)(t-۳)^۲\cos(۳t-۹)}_{f(t)}]$:

$F(s+۵) \Rightarrow F(s) = L[f(t)] \xrightarrow{\text{مثال قبل}} e^{-۳s}\left(\frac{۲s^۳-۵۴s}{(s^۲+۹)^۳}\right)$

جواب نهائی: $e^{-۳s}\left(\frac{۲s^۳-۵۴s}{(s^۲+۹)^۳}\right)\Big|_{s\to s+۵} = e^{-۳(s+۵)}\left(\frac{۲(s+۵)^۳-۵۴(s+۵)}{((s+۵)^۲+۹)^۳}\right)$ ← جواب

Scanned by CamScanner

Subject: «معادلات دیفرانسیل»

Date: «جلسه ۴ ص ۳»

مثال: $L\left[\frac{e^{-t}\sin(2t)}{t}\right] = \boxed{\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{s+1}{2}\right)}$ ← هفته قبل

** مثال: $L\left[\frac{e^{-t}\sin(2t)}{t-\pi}u_\pi(t)\right] = e^{-\pi s}L[f(t+\pi)] = e^{-\pi s}L\left[\frac{e^{-(t+\pi)}\sin(2(t+\pi))}{t+\pi-\pi}\right]$

$f(t) = \frac{e^{-t}\sin(2t)}{t-\pi}$

$$= e^{-\pi s}L\left[\frac{e^{-\pi}\cdot e^{-t}\sin(2t+2\pi)}{t}\right] = e^{-\pi}e^{-\pi s}L\left[\frac{e^{-t}\sin(2t)}{t}\right]$$

$$= e^{-\pi(1+s)}\left\{\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{s+1}{2}\right)\right\}$$

* بیشتر لاپلاس معکوس مثال است *

مثال: $L^{-1}\left[e^{-3s} L\left[\frac{s^2+3}{s^2+4}\right]\right] = u_3(t)f(t-3)$

$F(s) = L\left[\frac{s^2+3}{s^2+4}\right]$

$$\Rightarrow f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\ln\left(\frac{s^2+3}{s^2+4}\right)\right] \xrightarrow{\text{هفته قبل}}$$

$$-\frac{2}{t}\left\{\cos(\sqrt{3}t) - \cos(2t)\right\}$$

جواب نهایی → $\boxed{u_3(t)\left\{\frac{-2}{t-3}\left\{\cos\left(\sqrt{3}(t-3)\right) - \cos(2(t-3))\right\}\right\}}$

* ** مثال امتحانی: $L^{-1}\left[e^{-7s}\frac{2s+3}{s^2-5s+6}\right] = u_7(t)f(t-7)\ ,\ f(t) = L^{-1}\left[\frac{2s+3}{s^2-5s+6}\right]$

$F(s) = \frac{2s+3}{s^2-5s+6}$ ، $s^2-5s+6 = (s-2)(s-3)$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه کسر}} L^{-1}\left[\frac{-7}{s-2}\right] + L^{-1}\left[\frac{9}{s-3}\right]$$

$$= \boxed{-7e^{2t} + 9e^{3t}}$$

Scanned by CamScanner

Subject: «معادلات دیفرانسیل _ لاپلاس»
Date
«ادامه جلسه ۴»

مثال: $L^{-1}\left[\frac{-4s}{s^4+3s^2+2}e^{-7s}\right] = u_7(t)\, f(t-7) =$

$f(s)$

$\Rightarrow f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{-4s}{s^4+3s^2+2}\right]$ ← *تجزیه کسرها

$\rightarrow L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] - L^{-1}\left[\frac{2s}{s^2+2}\right] \Rightarrow$

«تجزیه»

$\Rightarrow \boxed{\cos t - 2\cos(\sqrt{2}\,t)}$ ← جواب نهایی

مثال: #

○○ نمایش یک تابع چند ضابطه‌ای برحسب تابع پله‌ای واحد:

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & a_1 < t < a_2 \\ f_2(t), & a_3 < t < a_4 \\ f_3(t), & t \geq a_5 \\ 0, & \text{سایر جاها} \end{cases} \Rightarrow \boxed{0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5}$$

$$f(t) = \left(u_{a_1}(t) - u_{a_2}(t)\right) f_1(t) + \left(u_{a_3}(t) - u_{a_4}(t)\right) f_2(t) + u_{a_5}(t) f_3(t)$$

Scanned by CamScanner

مثال. $f(t) = \begin{cases} \sin(t), & \frac{\pi}{2} \leq t < \pi \\ \cos(t), & \pi \leq t < 2\pi \\ t, & t \geq 2\pi \\ 0, & \text{سایر جاها} \end{cases}$

جواب: $f(t) = \left(u_{\frac{\pi}{2}}(t) - u_{\pi}(t)\right)\sin t + \left(u_{\pi}(t) - u_{2\pi}(t)\right)\cos t + u_{2\pi}(t) \cdot t \Rightarrow$

$\Rightarrow u_{\frac{\pi}{2}}(t)\sin t + (\cos t - \sin t)\, u_{\pi}(t) + (t - \cos t)\, u_{2\pi}(t)$

$\Rightarrow L[f(t)] = e^{-\frac{\pi}{2}s}\, \underbrace{\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}_{\cos t} + e^{-\pi s} L\left[\underbrace{\cos(t+\pi)}_{-\cos t} - \underbrace{\sin(t+\pi)}_{-\sin t}\right] +$

$e^{-2\pi s}\left(t + 2\pi - \cos(\underbrace{t + 2\pi}_{\cos t})\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{s}{s^2+1} + e^{-\pi s}\left\{\frac{-s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}\right\} + e^{-2\pi s}\left\{\frac{1}{s^2} + \frac{2\pi}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right\}}$$

Scanned by CamScanner

Subject: «معادلات لاپلاس»
Date: «جلسه ۴ ص 6»

تمرین:

$$f(t)=\begin{cases}(t-1)^2, & 1\le t<2\\ (t-2)^2, & 2\le t<3\\ (t-3)^2, & t\ge 3\\ 0, & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

$$h(t)=f(t)\star g(t)=\int_0^t f(t-x)\,g(x)\,dx$$

(علامت پیچش)

= پیچش ۲ تابع — علامت: $\star$

$$=\int_0^t f(t-u)\,g(u)\,du$$

$$=\int_0^t f(t-z)\,g(z)\,dz$$

$$=\dots$$

فرمول $\Rightarrow$ $\mathcal{L}[(f\star g)(t)]=\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-x)\,g(x)\,dx\right]=F(s)\,G(s)$

(علامت پیچش)

بطور کلی $\Rightarrow$ $\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)]=(f\star g)(t)$ (علامت پیچش ما)

$$=\int_0^t f(t-x)\,g(x)\,dx$$

پیچش خاصیت جابجایی دارد:

$$\int_0^t f(t-x)\,g(x)\,dx=\int_0^t g(t-x)\,f(x)\,dx$$

Scanned by CamScanner

$g(x)=1 \longrightarrow f(t)\star 1=\int_0^t f(x)\,dx$

$$\Longrightarrow \boxed{L\left[\int_0^t f(x)\,dx\right]=\frac{F(s)}{s}}$$

$$\longleftrightarrow L^{-1}\left[\frac{F(s)}{s}\right]=\int_0^t f(x)\,dx$$

مثال : $L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+5)^2}\right]=\boxed{\frac{1}{2\sqrt{5}}\,t\sin(\sqrt{5}\,t)}$ ← قبلاً حل شده

$\star$ مثال : $L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+5)^2}\right]=L^{-1}\left[\underbrace{\frac{1}{s^2+5}}_{F(s)}\cdot\underbrace{\frac{s}{s^2+5}}_{\cos(s)}\right]=f(t)\star g(t) \Longrightarrow$

$\hookrightarrow f(t)=\frac{1}{\sqrt{5}}\sin(\sqrt{5}t)$ $\quad \hookrightarrow g(t)=\cos(\sqrt{5}t)$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\sin(\sqrt{5}t)\star\cos(\sqrt{5}t)=\int_0^t\frac{1}{\sqrt{5}}\sin(\underbrace{\sqrt{5}(t-x)}_{\alpha})\cos(\underbrace{\sqrt{5}x}_{\beta})\,dx \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ یادآوری :

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\int\sin(ax+b)\,dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$$

$$\int\cos(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)$$

\# یادآوری : $\boxed{\cos(-\theta)=\cos\theta}$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{5}}\int_0^t\left\{\sin(\sqrt{5}t)+\sin(\sqrt{5}(t-2x))\right\}dx$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{5}}\left\{x\sin(\sqrt{5}\,t)+\frac{1}{2\sqrt{5}}\cos(\sqrt{5}(t-2x))\right\}\Bigg|_{x=0}^{x=t} \Longrightarrow$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt5}\left\{t\sin(\sqrt5 t)+\frac{1}{2\sqrt5}\cos(-\sqrt5 t)-\frac{1}{2\sqrt5}\cos(\sqrt5 t)\right\} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt5}\,t\sin(t\sqrt5)}$$

(the last two terms cancel: $= 0$)

*مثال امتحانی: $L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right] : L^{-1}\left[\underbrace{\frac{1}{s^2+1}}_{F(s)}\cdot\underbrace{\frac{1}{s^2+1}}_{G(s)}\right] = \sin(t)*\sin(t)$

$f(t)=\sin t$; $g(t)=\sin t$

$$\Rightarrow \int_0^t \sin(t-x)\sin x\,dx \xrightarrow{\text{بعد از محاسبه}} \boxed{\frac12(\sin t - t\cos t)}$$ ← جواب

مثال: $L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)^2}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{(s^2+1)^2}\right]$ → **اگر این فرمول را کنار s در مخرج نبود از یعنی بیرون تا تجزیه کسرها**

$\frac1s$: $F(s) \to f(t)=1$; $\frac{1}{(s^2+1)^2}$: $G(s) \to g(t) =$ مثال قبلی

$$\Rightarrow 1*g(t) = \int_0^t g(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_0^t \frac12(\sin x - x\cos x)\,dx \xrightarrow{\text{بعد از محاسبه}} \boxed{1-\cos t - \frac12 t\sin t}$$

مثال: $L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)(s^2+2)}\right]$: تجزیه کسرها : $\frac{s}{(s^2+1)(s^2+2)} = \frac{As+B}{s^2+1}+\frac{Cs+D}{s^2+2}$

$$\xrightarrow{\text{بعد از محاسبه}} \frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+2} \Rightarrow L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)(s^2+2)}\right] = L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] - L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+2}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos t - \cos(\sqrt2 t)}$$ ← جواب از راه اول

Scanned by CamScanner

جواب از راه دوم با پیچش: $L^{-1}\left[\dfrac{s}{(s^2+1)(s^2+2)}\right] = L^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+1}\cdot\dfrac{1}{s^2+2}\right] = \cos t * \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)\right)$

$F(s) \to f(t) = \cos t$

$G(s) \to g(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)$

بعد از حساب $\Rightarrow$ $\boxed{\cos t - \cos(\sqrt{2}t)}$

حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از تبدیل لاپلاس:

$$L[f^{(n+1)}(t)] = sL[f^{(n)}(t)] - f^{(n)}(0) \quad , n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$n = 0 \longrightarrow L[f'(t)] = sL[f(t)] - f(0) = \boxed{sF(s) - f(0)}$$

$$n = 1 \longrightarrow L[f''(t)] = sL[f'(t)] - f'(0) = \boxed{s^2F(s) - sf(0) - f'(0)}$$

مثال: با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید: «الف ۲ تا ۳ نمره»

به ۲ صورت می توان فهمید باید از لاپلاس حل کرد یا خود سؤال می دهد یا صورت سؤال مشتق تابع و خود تابع را در مقدار صفر می دهد

مثال:
$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 2e^t \\ y(0) = 0 , y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\longrightarrow L[y''] - 5L[y'] + 6L[y] = L[2e^t]$$

$$\longrightarrow s^2Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{0} - \underbrace{y'(0)}_{1} - 5(sY(s) - y(0)) + 6Y(s) = \frac{2}{s-1}$$

$$\longrightarrow Y(s)(s^2 - 5s + 6) - 1 = \frac{2}{s-1} \Longrightarrow Y(s)(s^2 - 5s + 6) = 1 + \frac{2}{s-1} = \frac{s+1}{s-1}$$

Scanned by CamScanner

$\longrightarrow Y(s) = \dfrac{s+1}{(s-1)(s^2-5s+6)} \longrightarrow \dfrac{s+1}{(s-1)(s-2)(s-3)} \xrightarrow{\text{تجزیه کسرها}} \dfrac{A}{s-1} + \dfrac{B}{s-2} + \dfrac{C}{s-3}$

$\xrightarrow{\text{بعد از محاسبه}} \dfrac{1}{s-1} + \dfrac{-3}{s-2} + \dfrac{2}{s-3}$

$\longrightarrow y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left[\dfrac{1}{s-1}\right] + L^{-1}\left[\dfrac{-3}{s-2}\right] + L^{-1}\left[\dfrac{2}{s-3}\right]$

$\longrightarrow \boxed{e^{t} - 3e^{2t} + 2e^{3t}}$ ← جواب نهایی

مثال:
$$\begin{cases} y'' + y = \sin t \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$\longrightarrow L[y''] + L[y] = L[\sin t]$

$\longrightarrow s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$

$\longrightarrow Y(s)(s^2+1) - 2s - 1 = \dfrac{1}{s^2+1}$

$\longrightarrow Y(s) = \dfrac{2s+1}{s^2+1} + \dfrac{1}{(s^2+1)^2}$

$\xrightarrow{\text{لاپلاس معکوس}} y(t) = L^{-1}\left[\dfrac{2s+1}{s^2+1}\right] + L^{-1}\left[\dfrac{1}{(s^2+1)^2}\right] \xrightarrow{\text{مثال قبل}} \boxed{2\cos t + \sin t + \tfrac{1}{2}(\sin t - t\cos t)}$

Scanned by CamScanner

Subject: «معادلات - لاپلاس»
Date: «جلسه ۴ ص 11»

مثال: $y'(t)+5\int_0^t y'(t-x)\cos(\sqrt{6}x)\,dx=e^x \;,\; y(0)=0$

«$y(t)$ تابع مجهول»

$y'(t)*\cos(\sqrt{6}t)$

«انتگرال دیفرانسیل پیچشی است» $\longrightarrow L[y'(t)]+5L[y'(t)*\cos\sqrt{6}t]=L[e^t]$

$\longrightarrow sY(s)-\underbrace{y(0)}_{0}+5(sY(s)-\underbrace{y(0)}_{0})\left(\frac{s}{s^2+6}\right)=\frac{1}{s-1}$

$\longrightarrow Y(s)\left(s+\frac{5s^2}{s^2+6}\right)=\frac{1}{s-1}$

$\longrightarrow y(s)\left(\frac{s^3+6s+5s^2}{s^2+6}\right)=\frac{1}{s-1}$

$\longrightarrow Y(s)=\frac{s^2+6}{s(s^2+5s+6)(s-1)}=\frac{s^2+6}{s(s-1)(s+2)(s+3)}$

تجزیه کسرها $\Longrightarrow \frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{s+2}+\frac{D}{s+3}$

$\longrightarrow y(t)=A+Be^t+Ce^{-2t}+De^{-3t}$ «$A,B,C,D=?$»

$\longrightarrow$ «الان جواب بدست آوردن»

Subject: «معادلات ـ لاپلاس»
Date: «12 جلسه ۶»

مثال: $y'(t)+e^{2t}\int_0^t e^{-2z}y(z)\,dz=1$ ، $y(0)=0$ ، $y'(0)=1$ (I)

* # پیچش باید $(t-x)$ یا $(t-u)$ یا $(t-z)$ داشته باشد ندارد این مثال پس:

(I) $\int_0^t e^{2t}e^{-2z}\,y(z)\,dz$

$\int_0^t e^{2(t-z)}\,y(z)\,dz$

حالا پیچش شد: $\boxed{e^{2t} * y(t)}$

$\Rightarrow L[y'(t)]+L[e^{2t} * y(t)]=L[1]$

$\rightarrow s^2y(s)-sy(0)-y'(0)+\frac{1}{s-2}y(s)=\frac{1}{s}$ ($y(0)=0$ ، $y'(0)=1$)

$\rightarrow y(s)=\frac{(s+1)(s-2)}{s(s-1)(s^2-s-1)}$

تجزیه کسرها $\rightarrow$ $\boxed{\frac{-2}{s}+\frac{2}{s-1}+\frac{-1}{s^2-s-1}}$

تمرین:

1) $y''(t)+y'(t)=\cos t+\int_0^t \sin(t-\lambda)\,y'(\lambda)\,d\lambda$ ، $y(0)=y'(0)=0$

جواب $\rightarrow$ $Y(s)=\frac{1}{s^3+s^2+s}=\frac{1}{s(s^2+s+1)}=\frac{1}{s}+\frac{-s-1}{s^2+s+1}\longrightarrow$

$\longrightarrow y(t)=1-e^{-\frac{1}{2}t}\left\{\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right\}$

PAPCO

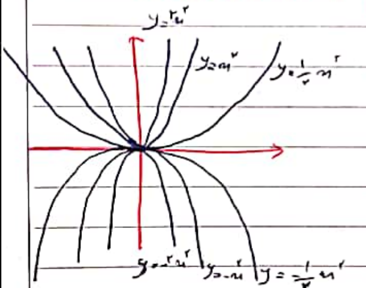
Scanned by CamScanner

Year: Month: Date: Subject

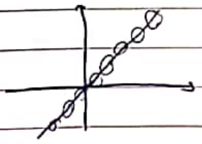
مسیرهای قائم (دسته مسیرهای متعامد):

$F(x,y,c)=0$ معرف یک دسته مسیر با یک پارامتر ثابت c است یا در حالت خاص $y=f(x,c)$ یک دسته مسیر خواهد بود.

مثال: دسته مسیر $y=cx^2$ را رسم کنید. (در امتحان می‌آید)



دسته دایره با مرکز دلخواه و با شعاع ۵ روی خط $y=x$:



$$(x-c)^2+(y-c)^2=5^2$$

(((Bastan)))

Year: Month: Date: Subject:

نکات مهم: هر دسته منحنی با یک پارامتر ثابت c جواب عمومی یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول هست و برعکس

برای به دست آوردن معادله‌ی دیفرانسیل یک دسته منحنی با یک پارامتر ثابت c به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) در صورت امکان از معادله‌ی دسته منحنی مقدار ثابت c را بر حسب x و y به دست می‌آوریم سپس از طرفین رابطه‌ی مورد نظر نسبت به x مشتق می‌گیریم.

۲) از معادله‌ی دسته منحنی نسبت به x مشتق می‌گیریم و بین معادله‌ی دسته منحنی و مشتق آن پارامتر ثابت c را حذف می‌کنیم

۳) برای به دست آوردن دسته منحنی متعامد بر یک دسته منحنی ابتدا معادله دیفرانسیل مرتبه اول دسته منحنی را به دست می‌آوریم سپس به جای y' ، $-\frac{1}{y'}$ را قرار می‌دهیم معادله‌ی دیفرانسیل جدید به دست آمده را حل می‌کنیم.

(((Bastan)))

Scanned by CamScanner

Year: Month: Date: Subject:

مثال: مسیرهای متعامد دسته مسیر زیر را بدست آورید.

$x^2 + cy^2 = 1 \Rightarrow c = \frac{1-x^2}{y^2}$

$\xrightarrow{\text{مشتق}} 0 = \left(\frac{1-x^2}{y^2}\right)' = \frac{-2xy^2 - 2yy'(1-x^2)}{y^4}$

$\Rightarrow \begin{cases} -2xy^2 - 2yy'(1-x^2) = 0 \\ y^4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y(xy + y'(1-x^2)) = 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow xy + y'(1-x^2) = 0$ ← معادله‌ی دیفرانسیل دسته مسیر

$y' \leftrightarrow \frac{-1}{y'} \Rightarrow xy + \frac{1-x^2}{-y'} = 0$ ← معادله‌ی دیفرانسیل دسته مسیر متعامد

$\rightarrow xyy' + x^2 - 1 = 0$

$\rightarrow xy\frac{dy}{dx} + x^2 - 1 = 0 \rightarrow xy\,dy + (x^2-1)\,dx = 0$

$\xrightarrow{\text{جدای پذیر}} y\,dy + \left(\frac{x^2-1}{x}\right)dx = 0 \Rightarrow \int y\,dy + \int \left(x - \frac{1}{x}\right)dx + c$

$\Rightarrow \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \ln|x| = c$ ← دسته مسیر متعامد

Scanned by CamScanner

Year: Month: Date: Subject:

مثال) دسته مسیرهای متعامد بر مسیرهای زیر را به دست آورید.

$y = c e^{-x^2}$ $\xrightarrow{\text{مشتق}}$ $y' = -2xc e^{-x^2} \Rightarrow \frac{y'}{y} = -2x$ معادله دیفرانسیل دسته مسیر

$y' \leftrightarrow \frac{-1}{y'} \Rightarrow \frac{\frac{-1}{y'}}{y} = -2x$ معادله دیفرانسیل دسته مسیر متعامد

$\Rightarrow \frac{-1}{yy'} = -2x \rightarrow 2xyy' = 1 \Rightarrow (2xy)\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow 2xydy = dx$

$2ydy = \frac{1}{x}dx \xrightarrow[\text{بگیر}]{\text{انتگرال}} \int 2ydy = \int \frac{1}{x}dx + \ln|c|$

$\Rightarrow y^2 = \ln|x| + \ln|c| = \ln|cx|$

$\rightarrow |cx| = e^{y^2} \rightarrow \pm cx = e^{y^2}$

$\rightarrow x = \frac{1}{\pm c} e^{y^2} \rightarrow x = Ce^{y^2}$

دسته مسیر متعامد در دستگاه مختصات قطبی:

$r = \sqrt{x^2+y^2}$, $r^2 = x^2+y^2$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$F(r, \theta, c) = 0 \rightarrow$ دسته مسیر در مختصات قطبی

$r = c\cos\theta$ یا $r = c(\sin\theta + \cos\theta + \theta)$

حالت خاص $\rightarrow r = f(c, \theta)$ $\quad r' = \frac{dr}{d\theta}$

برای به دست آوردن دسته مسیر متعامد بر یک دسته مسیر در دستگاه مختصات قطبی

Bastan

ابتدا معادله دیفرانسیل مرتبه اول دسته منحنی را برحسب r و r' و θ به دست می آوریم

سپس قرار می دهیم $\frac{r}{r'} \leftrightarrow \frac{-r'}{r}$ یا $\frac{r'}{r} \leftrightarrow \frac{-r}{r'}$ و بعد معادله

دیفرانسیل به دست آمده را حل می کنیم.

مثال) دسته منحنی متعامد بر دسته منحنی زیر را به دست آورید.

$r = c(1+\cos\theta)$ دل‌نما یا دلوار

$r' = c(0-\sin\theta) = -c\sin\theta$

معادله‌ی دیفرانسیل دسته منحنی $\leftarrow$ $\frac{r}{r'} = \frac{c(1+\cos\theta)}{-c\sin\theta} = -\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$ تقسیم

معادله‌ی دیفرانسیل دسته منحنی متعامد $\leftarrow$ $\frac{-r'}{r} = -\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \Rightarrow \frac{r'}{r} = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

$$\int \frac{r'}{r}\,d\theta = \int \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta$$

$$\Rightarrow \ln|r| = \int \left(\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) d\theta + \ln|c|$$

$$\int \frac{1}{\sin\theta}\,d\theta = \int \csc\theta\,d\theta = -\ln|\csc\theta + \cot\theta|$$

$$\Rightarrow \ln|r| = -\ln|\csc\theta + \cot\theta| + \ln|\sin\theta| + \ln|c|$$

$$= \ln\left|\frac{c\sin\theta}{\csc\theta + \cot\theta}\right|$$

(((Bastan)))

Year: Month: Date: Subject:

$$|r| = \left| \frac{c\sin\theta}{\csc\theta + \cot\theta} \right| \Rightarrow r = \pm c \frac{\sin\theta}{\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}} \Rightarrow c\,\frac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta}$$

c

$$= c\,\frac{1-\cos^2\theta}{1+\cos\theta} = c\,(1-\cos\theta) \Rightarrow r = c\,(1-\cos\theta)$$

دستور متعامد ن

(((Bastan)))

Subject: معادلات ۱

Date: لاپلاس معکوس (۵)

حل دستگاه معادلات با استفاده از تبدیل لاپلاس :

$$\begin{cases} x(t) + 2y'(t) = -\sin t \\ 2x'(t) - y(t) = \cos t \end{cases} \quad , x(0) = 0 \quad , y(0) = 1$$

$x(t)$, $y(t)$ که توابعی از t مجهول :

$$\begin{cases} L[x(t)] + 2L[y'(t)] = L[-\sin t] \\ 2L[x'(t)] - L[y(t)] = L[\cos t] \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x(s) + 2(sY(s) - y(0)) = -\frac{1}{s^2+1} \\ 2(sx(s) - x(0)) - \frac{1}{(s)} = \frac{s}{s^2+1} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x(s) + 2sY(s) = \frac{1}{s^2+1} \\ 2sX(s) - Y(s) = \frac{s}{s^2+1} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} X(s) + 2sY(s) = 2 - \frac{1}{s^2+1} \\ 2sX(s) - Y(s) = \frac{s}{s^2+1} \end{cases}$$

روش حذفی $\longrightarrow \begin{cases} X(s) = \frac{1}{s^2+1} \longrightarrow x(t) = L^{-1}[X(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \sin t \\ Y(s) = \frac{s}{s^2+1} \longrightarrow Y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] = \cos t \end{cases}$

Scanned by CamScanner

Subject: معادلات لاپلاس
Date: جلسه ۲

دستگاه های زیر را حل کنید :

$$x''(t)+y'(t)+y(t)=3+t$$

$$x(t)-y''(t)-x'(t)=t^2-2t$$

$x(0)=x'(0)=0$ و

$y(0)=0$ و $y'(0)=1$

لاپلاس $\longrightarrow$
$$\begin{cases} s^2X(s)-sx(0)-x'(0)+sY(s)-y(0)+Y(s)=\frac{3}{s}+\frac{1}{s^2} \\ X(s)-\left(s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right)-\left(sX(s)-x(0)\right)=\frac{2}{s^3}-\frac{2}{s^2} \end{cases}$$

$\times 3$
$$\longrightarrow \begin{cases} s^2X(s)+sY(s)=\frac{3}{s}+\frac{1}{s^2} \\ (1-s)X(s)-s^2Y(s)=\frac{2}{s^3}-\frac{2}{s^2}-1 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} X(s)=\frac{2}{s^3} \longrightarrow x(t)=t^2 \\ Y(s)=\frac{1}{s^2} \longrightarrow y(t)=t \end{cases}$$

حل معادلات خطی مرتبه n با ضرایب ثابت :

$$a_ny^{(n)}+\dots+a_2y''+a_1y'+a_0y=R(x)$$

$$2y''+3y'+5y=\sin x+e^x$$

a ها ثابت :

$$3y'''+2y''+y'+y=e^x\sin x+x^3$$

نکته: اگر $R(x)=0$ باشد، آنگاه معادله را همگن گویند.

حل معادله همگن :

$$a_ny^{(n)}+\dots+a_2y''+a_1y'+a_0y=0$$

$y=e^{rx}$ جواب معادله است که r ریشه چند جمله‌ای مشخصه زیر است.

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject: [illegible]

Date: [illegible]

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\longrightarrow \begin{cases} y^{(n)} \longleftrightarrow x^n, \quad n = 1, 2, \dots \\ y \longleftrightarrow 1 \end{cases}$$

نمونه سوال ص۸

$$y'' - y' - y - \int_0^t y''(t-x)\sin x\,dx = 2\cos t - t^2 - 2t$$

$$y'' - y' - y - 5\int_0^t y''(t-x)\sin x\,dx = 2 - 2t - t^2 - 2(1-\cos t) = -2t - t^2 + 2\cos t$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

$$\Rightarrow (s^2 + s + 1)\,Y(s) =$$

$$\rightarrow s^2 Y(s) - sY(s) - Y(s) - \frac{s^2}{s^2+1}Y(s) = -\frac{2}{s^3} - \frac{2}{s^2} + \frac{2s}{s^2+1}$$

$$\rightarrow Y(s)\left(s^2 - s - 1 - \frac{s^2}{s^2+1}\right) = -\frac{2}{s^3}\left(1 + \frac{1}{s}\right)$$

$$\rightarrow Y(s)\left(\frac{(s^2+1)(s^2-s-1) - s^2}{s^2+1}\right) = -2\left\{\frac{s(s^2+1) + s^2 + 1 - s^4}{s^3(s^2+1)}\right\}$$

$$\rightarrow Y(s)\left(\frac{s^4 - s^3 - s^2 + s^2 - s - 1 - s^2}{s^2+1}\right)$$

$$\rightarrow Y(s)\left(\frac{s^4 - s^3 - s^2 - s - 1}{s^2+1}\right) = -2\left\{\frac{s^3 + s + s^2 + 1 - s^4}{s^3(s^2+1)}\right\}$$

$$\rightarrow Y(s)\left(\frac{s^4 - s^3 - s^2 - s - 1}{s^2+1}\right) = 2\left\{\frac{s^4 - s^3 - s^2 - s + 1}{s^3(s^2+1)}\right\}$$

$$\rightarrow Y(s) = \frac{2}{s^3} \rightarrow y(t) = t^2$$

Scanned by CamScanner

! بخش 3 از جزوه معادلات دیفرانسیل استاد ارژنگ !

نمونه سوالات امتحانات دوره های اخیر درس معادلات دیفرانسیل

حل شده توسط استاد ارژنگ

Scanned by CamScanner

به نام خدا

دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج

نمره میان ترم
نمره تحقیق پروژه
نمره پایان ترم
نمره نهایی

سوالات امتحانی درس معادلات دیفرانسیل نیمسال اول ۹۷-۹۶ رشته تحصیلی: فنی و مهندسی

استاد: کلیه اساتید تاریخ امتحان: ۹۶/۱۰/۱۳ (ساعت ۱۶) مدت پاسخگویی: ۱۰۰ دقیقه

۱. معادلات زیر را حل کنید: (۶ نمره)

۱) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

۲) $y' + y^2 - 2y\sin x + \sin^2 x = \cos x \quad , \quad y_1 = \sin x$

۳) $y' e^y + \frac{e^y}{x} = x e^{3y}$

۲. مسیرهای قائم بر خانواده‌ی منحنی‌های $y^2 = cx^3 + x^2 - 1$ را پیدا کنید. (۲ نمره)

۳. معادلات زیر را حل کنید: (۴ نمره)

۱) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 2$

۲) $x^2 y'' - xy' + 3y = x$

۴. اگر y_1 ، y_2 جواب خصوصی معادله همگن نظیر معادله‌ی زیر باشد جواب عمومی را پیدا کنید. (۲ نمره)

$$(1-x)y'' + xy' - y = (x-1)^2 e^x \quad , \quad y_1 = e^x \ , \ y_2 = x$$

۵. تبدیلات زیر را پیدا کنید: (۴ نمره)

الف) $L^{-1}\left\{ e^{-2s} \ln \frac{s-2}{s+2} \right\}$

ب) $L\left\{ t^3 e^{-2t} \sin\sqrt{2}\, t \right\}$

۶. معادله زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید: (۴ نمره)

$$y'' - 3y' + 2y = \begin{cases} t & 0 \le t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases} \qquad y(0) = y'(0) = 1$$

موفق باشید.

Scanned by CamScanner

$y' + \frac{e^y}{x} = xe^{3y}$

$y' + \frac{1}{x} = xe^{2y}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} + xe^{2y} = \frac{x^2e^{2y} - 1}{x}$

$e^{2y} = u \rightarrow 2y = \ln u$

$\rightarrow y = \frac{1}{2}\ln u \rightarrow y' = \frac{1}{2}\frac{u'}{u}$

$\rightarrow \frac{1}{2}\frac{u'}{u} + \frac{1}{x} = xu$

$\rightarrow u' + \frac{2}{x}u = 2xu^2$ ← برنولی

$\frac{dy}{dx}e^y + \frac{1}{x}e^y = xe^{3y}$

$\rightarrow e^y dy = (xe^{3y} - \frac{1}{x}e^y)dx$

$\rightarrow \underbrace{(xe^{3y} - \frac{1}{x}e^y)}_{P}dx - \underbrace{e^y}_{Q}dy = 0$

$\Delta = 0 - (3xe^{3y} - \frac{1}{x}e^y)$

$\rightarrow \underbrace{(x^2e^{3y} - e^y)}_{P}dx - \underbrace{xe^y}_{Q}dy = 0$

$P = \cancel{e^y}$

$y'e^y + \frac{e^y}{x} = xe^{3y}$

$\xrightarrow{\div e^{3y}} y'e^{-2y} + \frac{1}{x}e^{-2y} = x$

$e^{-2y} = u \rightarrow -2y'e^{-2y} = u'$

$\xrightarrow{\times(-2)} -2y'e^{-2y} - \frac{2}{x}e^{-2y} = -2x$

$\rightarrow u' - \frac{2}{x}u = -2x$

خطی مرتبه اول

$y' + \frac{1}{x} = xe^{2y}$

$u = e^{2y} \rightarrow 2y = \ln u$

$\rightarrow 2y' = \frac{u'}{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{2u}$

$\rightarrow \frac{u'}{2u} + \frac{1}{x} = xu$

$\rightarrow u' + \frac{2}{x}u = 2xu^2$

برنولی

$n = 2 \rightarrow v = u^{1-2} = u^{-1}$

$\rightarrow v' = -u'u^{-2}$

$\xrightarrow{\times(-u^{-2})} -u'u^{-2} + (\frac{2}{x}u)(-u^{-2}) = 2xu^2(-u^{-2})$

$\rightarrow v' - \frac{2}{x}v = -2x$

$\mu = e^{\int -2/x\, dx} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

$v = x^2\left[\int x^{-2}(-2x)\,dx + c\right]$

Scanned by CamScanner

$y' + y^2 - 2y\sin x + \sin^2 x = \cos x$, $y_1 = \sin x$ ① سوال [illegible] !

$y = y_p + u^{-1} = \sin x + u^{-1}$

$y' = \cos x - u'u^{-2}$

$\rightarrow \cos x - u'u^{-2} + (\sin x + u^{-1})^2 - 2(\sin x + u^{-1})\sin x + \sin^2 x = \cos x$

$\rightarrow \cos x - u'u^{-2} + \sin^2 x + u^{-2} + 2\sin x\, u^{-1} - 2\sin^2 x - 2u^{-1}\sin x + \sin^2 x = \cos x$

$\rightarrow -u'u^{-2} + u^{-2} = 0 \xrightarrow{\text{ضرب در } u^2} u' - 1 = 0 \rightarrow u' = 1 \rightarrow u = x + c$

$\rightarrow y = y_p + u^{-1} = \sin x + \frac{1}{x+c}$

۹۴/۱۰/۱۷

$y'e^y + \frac{e^y}{x} = xe^{3y} \rightarrow y' + \frac{1}{x} = xe^{2y}$

نکن

$\rightarrow xy' + 1 = x^2e^{2y} \rightarrow x\frac{dy}{dx} + 1 = x^2e^{2y}$

$\rightarrow x\,dy = (x^2e^{2y} - 1)\,dx$ $\qquad (1 - x^2e^{2y})dx + x\,dy = 0$, $P = 1 - x^2e^{2y}$, $q = x$

$\rightarrow x\,dy + (1 - x^2e^{2y})dx = 0$

$\Delta = q_x - P_y = 1 - (2x^2e^{2y})$
$= 1 - 2x^2e^{2y}$

~~$\rightarrow y' + \frac{1}{x} = xe^{2y}$~~

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = xe^{2y} - 1/x = \frac{\quad}{x}$

[illegible]

$\mu = x^\alpha y^\beta \rightarrow (x^\alpha y^\beta - x^{\alpha+2}y^\beta e^{2y})dx + x^{\alpha+1}y^\beta dy = 0$, $P = x^\alpha y^\beta - x^{\alpha+2}y^\beta e^{2y}$, $Q = x^{\alpha+1}y^\beta$

$Q_x = P_y = (\alpha+1)x^\alpha y^\beta =$

Scanned by CamScanner

(۲) (13)

$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 2$

$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0 \longrightarrow$ مجموع ضرایب صفر

$\rightarrow r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = r^3 - 6r^2 + 12r - r - 6$

$= (r^3 - r) - 6(r^2 - 2r + 1)$

$= r(r^2 - 1) - 6(r-1)^2 = (r-1)(r(r+1) - 6(r-1)) = (r-1)(r^2 - 5r + 6) = 0$

$= (r-1)(r-2)(r-3) = 0 \longrightarrow r = 1, r = 2, r = 3$

$y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$

خوب ـ جواب

$y_p = A \longrightarrow -6A = 2 \longrightarrow A = \frac{-2}{6} = -1/3$

$y_c = y_p + y_h$

$x^2 y'' - xy' + 3y = x$

خوب ـ جواب

$P_2(r) = r(r-1) - r + 3 = r^2 - 2r + 3 = (r-1)^2 + 2 = 0 \longrightarrow r - 1 = \pm\sqrt{2}i$

$\longrightarrow r = \underbrace{1}_{\alpha} \pm \underbrace{\sqrt{2}}_{\beta} i$

$\begin{cases} y_1 = x^{\alpha}\cos(\beta \ln x) = x\cos(\sqrt{2}\ln x) \\ y_2 = - - - = x\sin(\sqrt{2}\ln x) \end{cases}$

$z = \ln x \longrightarrow y'' - 2y' + 3y = e^{z}$ معادله با ضرایب ثابت شد

مشتق نبود z!

$y_p = Ae^{z} \longrightarrow Ae^{z} - 2Ae^{z} + 3Ae^{z} = e^{z}$

$\longrightarrow 2Ae^{z} = e^{z} \longrightarrow 2A = 1 \longrightarrow A = 1/2$

$\longrightarrow y_p = \frac{1}{2}e^{z} = \frac{1}{2}x$

$\longrightarrow y_c = y_h + y_p = c_1 x\cos(\sqrt{2}\ln x) + c_2 x\sin(\sqrt{2}\ln x) + \frac{1}{2}x$

Scanned by CamScanner

(۲۳)

سوال ۴ ، ۱ :

$$\begin{cases} (1-x)y'' + xy' - y = (x-1)^2 e^x \\ y_1 = x ,\ y_2 = e^x \end{cases}$$

$$\longrightarrow\ y'' \quad R(x) = \frac{(x-1)^2 e^x}{1-x} = (1-x)e^x$$

$$y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 = ?$$

$$w(y_1, y_2) = w(x, e^x) = \begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} = xe^x - e^x = (x-1)e^x$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 \\ R(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (1-x)e^x \end{bmatrix}$$

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^x \\ (1-x)e^x & e^x \end{vmatrix}}{(x-1)e^x} = \frac{-(1-x)e^x e^x}{(x-1)e^x} = e^x \longrightarrow c_1 = e^x$$

$$c_2' = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & (1-x)e^x \end{vmatrix}}{(x-1)e^x} = \frac{x(1-x)e^x - 0}{(x-1)e^x} = -x \longrightarrow c_2 = -\frac{x^2}{2}$$

$$\longrightarrow y_p = (e^x)x + \left(-\frac{x^2}{2}\right)e^x = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)e^x$$

۹۴/۱۰/۱۷

---

(۵)

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-2s} \ln\left(\frac{s-2}{s+2}\right)\right], \quad \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-as}F(s)\right] = u_a(t) f(t-a)$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

$$= u_2(t) f(t-2), \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\ln\left(\frac{s-2}{s+2}\right)\right] = -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left[\overbrace{\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+2}}^{F'(s)}\right]$$

$$= -\frac{1}{t}\left\{e^{2t} - e^{-2t}\right\} \longrightarrow y_p = u_2(t)\left\{\frac{1}{t}\left(e^{-2t} - e^{2t}\right)\right\}\Big|_{t \to t-2}$$

$$= u_2(t)\frac{1}{t-2}\left\{e^{-2(t-2)} - e^{2(t-2)}\right\}$$

Scanned by CamScanner

$$L\{t^3 e^{-2t}\sin\sqrt{2}t\} = L[e^{-2t}\,(\underbrace{t^3\sin\sqrt{2}t}_{f(t)})] = F(s+2)$$

$$F(s) = L[t^3\sin(\sqrt{2}t)] = (-1)^3\left(\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right)'''$$

$$= -\sqrt{2}\left(\frac{1}{s^2+2}\right)''' = \left(\frac{-48s^3}{(s^2+2)^4} + \frac{24s}{(s^2+2)^3}\right)(-\sqrt{2})$$

~~$\left(\frac{1}{s^2+2}\right)$~~

$$= \left(\frac{-48s^3(s^2+2)+24s}{(s^2+2)^4}\right)(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}\left(\frac{48s^3(s^2+2)-24s}{(s^2+2)^4}\right)$$

$$= 24\sqrt{2}s\left\{\frac{2s^2(s^2+2)-1}{(s^2+2)^4}\right\}$$

$$\left(\frac{1}{s^2+2}\right)'' = \frac{8s^2}{(s^2+2)^3} - \frac{2}{(s^2+2)^2}$$

Scanned by CamScanner

(3)

$$y''-3y'+2y=\begin{cases} t, & 0\le t\le 1 \\ 0, & t>1\end{cases} = (u_0(t)-u_1(t))t \qquad L[u_0(t$$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-3(sY(s)-y(0))+2Y(s)=L[(u_0-u_1)t]$$

$$\to (s^2-3s+2)Y(s)=L[u_0(t)t]-L[u_1(t)t]$$

$$=e^{-0s}L[t+0]-e^{-1s}L[t+1]=\frac{1}{s^2}-e^{-s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)$$

$$\to (s^2-3s+2)Y(s)=\frac{1}{s^2}-e^{-s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)$$

$$\to (s-1)(s-2)Y(s)=___$$

$$\to Y(s)=\frac{1}{(s-1)(s-2)}\left\{\frac{1}{s^2}-e^{-s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)\right\}$$

$$\to y(t)=L^{-1}[Y(s)]=?$$

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)s^2}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s-1}+\frac{D}{s-2}=\frac{\frac{3}{4}}{s}+\frac{\frac{1}{2}}{s^2}+\frac{-1}{s-1}+\frac{\frac{1}{4}}{s-2}$$

$$\to 1=As(s-1)(s-2)+B(s-1)(s-2)+Cs^2(s-2)+Ds^2(s-1)$$

$$\to s=0\to 1=2B\to B=1/2$$

$$\to s=1\to 1=-C\to C=-1$$

$$\to s=2\to 1=4D\to D=1/4$$

دلخواه $s=3\to 1=6A+2B+9C+18D\to 6A=1-\left(2\times\frac{1}{2}-9+\frac{18}{4}\right)=1+8-\frac{9}{2}=9-\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$

$$\to A=\frac{9}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{3}{4}$$

Scanned by CamScanner

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{(s-1)(s-2)s^2}+\frac{1}{(s-1)(s-2)s}$$

(1)

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)s}=\frac{\frac{1}{2}}{s}+\frac{-1}{s-1}+\frac{\frac{1}{2}}{s-2}$$

بقیه راحت است.

Scanned by CamScanner

معادلات دیفرانسیل

ترم تابستان ۹۴

تابستان ۹۴

$y' = \frac{y^4 - x^4}{y^4 - 4xy^3}$

Scanned by CamScanner

به نام خدا

دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج

سوالات امتحانی درس معادلات دیفرانسیل نیمسال تابستان ۹۶- ۹۵ رشته تحصیلی: فنی و مهندسی استاد: کلیه اساتید

تاریخ امتحان: ۹۶/۶/۸ ۸ صبح مدت پاسخگویی: ۱۲۰ دقیقه

۱. معادلات زیر را حل کنید: (۴/۵ نمره)

۱) $y' = \dfrac{2x^2 + y^2}{-2xy + 3y^2}$ ۲) $y' = \dfrac{2y}{x+1} + e^x (x+1)^2$ ۳) $y' = 1 + \dfrac{y}{x} - \dfrac{y^2}{x^2}$ ؛ $y_1(x) = x$

۲. با پیدا کردن عامل انتگرال ساز به فرم $\mu = x^\alpha y^\beta$ معادله ی زیر را حل کنید: (۱/۵ نمره)

$$(x^4 y^2 - y)dx + (x^2 y^4 - x)dy = 0$$

۳. معادلات زیر را حل کنید: (۴ نمره)

الف) $y^{(4)} - 2y'' + 1 = 0$ ب) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x\ln x$

۴. اگر $y_1 = e^x$ یک جواب خصوصی از معادله ی $(x+1)y'' - (2x+3)y' + (x+2)y = 0$ باشد، جواب عمومی آن را پیدا کنید. (۲ نمره)

۵. تبدیلات زیر را پیدا کنید: (۳ نمره)

۱) $L\left[e^{2x} \displaystyle\int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt\right]$ ۲) $L^{-1}\left[\dfrac{e^{-2s}}{s^3+s}\right]$

۶. معادله ی زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید: (۳ نمره)

$$y'' + 4y = \begin{cases} x & 0<x<1 \\ 0 & x>1 \end{cases} \qquad y(0)=0,\ y'(0)=0$$

۷. دستگاه زیر را حل کنید: (۳ نمره)

$$\begin{cases} x' + 3x - 4y = \cos t \\ y' - 3y + 2x = t \end{cases} \qquad x(0)=0,\ y(0)=1$$

موفق باشید.

Scanned by CamScanner

(1) $y' = \dfrac{2x^2+y^2}{-2xy+3y^2} \longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x^2+y^2}{-2xy+3y^2} \longrightarrow$

$(-2xy+3y^2)\,dy = (2x^2+y^2)\,dx \longrightarrow \underbrace{(2x^2+y^2)}_{P}dx + \underbrace{(2xy-3y^2)}_{Q}dy$

$\Delta = Q_x - P_y = 2y - 2y = 0$ کامل.

$f(x,y) = \frac{2}{3}x^3 + xy^2 - y^3 = c$

از راه کامل

از راه همگن

$y = vx \longrightarrow y' = v'x + v \longrightarrow$

$$v'x + v = \frac{2x^2+v^2x^2}{-2x^2v+3v^2x^2} = \frac{2+v^2}{-2v+3v^2}$$

$$\longrightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{2+v^2}{-2v+3v^2} - v = \frac{2+v^2+2v^2-3v^3}{-2v+3v^2} = \frac{-3v^3+3v^2+2}{-2v+3v^2}$$

$$\longrightarrow \frac{-2v+3v^2}{-3v^3+3v^2+2}dv = \frac{dx}{x} \longrightarrow \int \frac{-2v+3v^2}{-3v^3+3v^2+2}dv = \int\frac{dx}{x} + \ln|c|$$

$$\longrightarrow -\frac{1}{3}\ln|v^3 - v^2 - 2/3| = \ln|cx|$$

$$\longrightarrow \ln|v^3 - v^2 - 2/3| = \ln|cx|^{-3}$$

c جدید

$$\longrightarrow |v^3 - v^2 - \tfrac{2}{3}| = |cx|^{-3} \longrightarrow v^3 - v^2 - \tfrac{2}{3} = \pm c^{-3}/x^3$$

$$\longrightarrow x^3(v^3 - v^2 - 2/3) = c$$

$$\longrightarrow x^3\left(\frac{y^3}{x^3} - \frac{y^2}{x^2} - \frac{2}{3}\right) = c$$

$$\longrightarrow y^3 - xy^2 - \frac{2}{3}x^3 = c \longrightarrow \frac{2}{3}x^3 + xy^2 - y^3 = -c = c$$

جدید

۱۴.۹.۸

Scanned by CamScanner

(۲) $y' = \dfrac{2y}{x+1} + e^x(x+1)^2$

$\rightarrow y' - \dfrac{2}{x+1}y = e^x(x+1)^2 \; , \; \mu = e^{\int -\frac{2}{x+1}dx} = e^{\ln|x+1|^{-2}} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$\rightarrow y = \dfrac{1}{\frac{1}{(x+1)^2}} \int \left(\dfrac{1}{(x+1)^2} e^x (x+1)^2 dx + c\right) = (x+1)^2 \left[e^x + c\right]$

$y' = 1 + \dfrac{y}{x} - \dfrac{y^2}{x^2} \; , \; y_1 = x$

$y = x + u^{-1} \longrightarrow y' = 1 - u'u^{-2} \longrightarrow 1 - u'u^{-2} = 1 + 1 + \dfrac{u^{-1}}{x} - \dfrac{(x+u^{-1})^2}{x^2}$

$\longrightarrow 1 - u'u^{-2} = 1 + 1 + \frac{1}{x}u^{-1} - \frac{1}{x^2}(x^2 + u^{-2} + 2xu^{-1})$

$\longrightarrow \cancel{1} - u'u^{-2} = \cancel{1} + \cancel{1} + \frac{1}{x}u^{-1} - \cancel{1} - \frac{1}{x^2}u^{-2} - \frac{2}{x}u^{-1}$

$\longrightarrow -u'u^{-2} + \frac{1}{x}u^{-1} = -\frac{1}{x^2}u^{-2}$

$\longrightarrow u'u^{-2} - \frac{1}{x}u^{-1} = \frac{1}{x^2}u^{-2}$

ضرب در u^2

$\longrightarrow u' - \frac{1}{x}u = \frac{1}{x^2} \longrightarrow \mu = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$

$\longrightarrow u = \dfrac{1}{\frac{1}{x}}\left[\int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} dx + c\right] = x\left[\frac{-1}{2x^2} + c\right]$

---

(۲) عامل انتگرال‌ساز: حسب $\mu = x^\alpha y^\beta$

$(x^4y^2 - y)dx + (x^2y^4 - x)dy = 0$

$x^\alpha y^\beta \{\longrightarrow\} = 0 \longrightarrow \underbrace{(x^{4+\alpha}y^{2+\beta} - x^\alpha y^{\beta+1})}_{P}dx + \underbrace{(x^{2+\alpha}y^{\beta+4} - x^{\alpha+1}y^\beta)}_{Q}dy = 0$

$Q_x = P_y \Rightarrow (\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta+4} - (\alpha+1)x^\alpha y^\beta = (\beta+2)x^{\alpha+3}y^{\beta+2} - (\beta+1)x^\alpha y^\beta$

$\rightarrow \begin{cases} \alpha+2=0 \longrightarrow \alpha=-2 \\ \beta+2=0 \longrightarrow \beta=-2 \\ -(\alpha+1) = -(\beta+1) \end{cases}$

Scanned by CamScanner

(۲) $\longrightarrow \mu = x^{-2}y^{-2} \longrightarrow (x^2 - x^{-2}y^{-1})\,dx + (y^2 - x^{-1}y^{-2})\,dy = 0$

P , Q

$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + x^{-1}y^{-1} + y^3/3 = C$

$\longrightarrow \boxed{x^3 + 3x^{-1}y^{-1} + y^3 = C}$ ← جواب

$y^{(4)} - 2y'' + 1 = 0 \rightsquigarrow E_1 \quad y^{(4)} - 2y'' = -1$ (۳)

$P_4(r) = r^4 - 2r^2 = 0 \longrightarrow r^2(r^2 - 2) = 0 \longrightarrow r = 0$,دوبار

$r = \pm\sqrt{2}$

$y_1 = e^{\sqrt{2}x}, \; y_2 = e^{-\sqrt{2}x}, \; y_3 = 1, \; y_4 = x$

$y_p = A \xrightarrow{x^2} y_p = Ax^2 \longrightarrow y_p^{(4)} = 0, \; y_p'' = 2A \longrightarrow -2(2A) + 1 = 0$

$\longrightarrow \boxed{A = \frac{1}{4}}$

$\boxed{y_p = \frac{1}{4}x^2}$

$x^2y'' - 2xy' + 2y = x\ln x$

$P_2(r) = r(r-1) - 2r + 2 = r^2 - 3r + 2 = 0 \longrightarrow (r-1)(r-2) = 0 \longrightarrow r = 1, 2$

$y_1 = x^1, \; y_2 = x^2$, $z = \ln x \Longleftrightarrow x = e^z$

معادله با ضرایب ثابت

$\frac{d^2y}{dz^2} - 3\frac{dy}{dz} + 2y = ze^z$

$y_1 = e^z, \; y_2 = e^{2z}, \; y_p = (Az + B)e^z \xrightarrow{\text{ضرب در } z} y_p = z(Az + B)e^z$
$= (Az^2 + Bz)e^z$

$y_p' = (2Az + B + Az^2 + Bz)e^z$
$= (Az^2 + (2A + B)z + B)e^z$

$y_p'' = (Az^2 + (2A + B)z + B + 2Az + 2A + B)e^z$
$= (Az^2 + (4A + B)z + 2B + 2A)e^z$

Scanned by CamScanner

(ج)

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = \left(Az^2 + (4A+B)z + 2B + 2A\right)e^z$$

$$-3\left(Az^2 + (2A+B)z + B\right)e^z + 2\left(Az^2 + Bz\right)e^z = ze^z$$

$$\rightarrow \left(0z^2 + (-2A)z + 2A - B\right)e^z = ze^z$$

$$\rightarrow -2A = 1 \rightarrow A = -\tfrac{1}{2}, \quad 2A - B = 0$$

$$\rightarrow B = 2A = -1$$

$$\rightarrow y_p = \left(-\tfrac{1}{2}z^2 - z\right)e^z = \left(-\tfrac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x\right)x$$

$$y_1 = x, \quad y_2 = x^2, \quad R(x) = \frac{x\ln x}{x^2} = \frac{1}{x}\ln x$$ از روش تغییر پارامترها

$$W(x, x^2) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2, \quad T = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\ln x}{x} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow y_p = c_1y_1 + c_2y_2, \quad c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ \frac{\ln x}{x} & 2x \end{vmatrix}}{x^2} = \frac{-x\ln x}{x^2} = -\frac{\ln x}{x}$$

$$\rightarrow c_1 = \int -\frac{\ln x}{x}\,dx = -\frac{(\ln x)^2}{2}$$

$$c_2' = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{\ln x}{x} \end{vmatrix}}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$\rightarrow c_2 = \int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\ln x\,dx = -\frac{1}{x}\ln x - \int -\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

f' g

$$= -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} \rightarrow c_2 = -\frac{1}{x}(\ln x + 1)$$

$$y_p = -\frac{1}{2}(\ln x)^2 x - \frac{1}{x}(\ln x + 1)x^2 = -\frac{1}{2}(\ln x)^2 x - x\ln x - x$$

Scanned by CamScanner

(۵)

$$\longrightarrow y_p = \left(-\frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x\right)x \;\left(-x\right)$$

جواب غ.ع

$$\longrightarrow y_p = \left(-\frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x\right)x$$

---

(۴)

$$(x+1)y'' - (2x+3)y' + (x+2)y = 0 \quad , y_1 = e^x$$

$$P(x) = -\frac{2x+3}{x+1} \;,\; y_2 = v y_1 \;,\; v' = \frac{1}{y_1^2} e^{\int -P(x)dx}$$

$$\longrightarrow \int -P(x)dx = \int \frac{2x+3}{x+1} dx = \int \frac{2x+2+1}{x+1} dx$$

$$= \int \left(2 + \frac{1}{x+1}\right) dx = 2x + \ln(x+1)$$

$$\longrightarrow v' = \frac{1}{(e^x)^2} e^{2x + \ln(x+1)} = \frac{1}{e^{2x}} e^{2x} \cdot e^{\ln(x+1)}$$

$$= x+1 \longrightarrow v = \int (x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x \longrightarrow y_2 = v y_1 = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)e^x$$

$$L\left[e^{2x} \underbrace{\int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt}_{f(x)}\right] = F_1(s-2)$$

(۵)

$$F_1(s) = L\left(\int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt\right] = \frac{F(s)}{s} \;,\; F(s) = L\left[1-e^{-t}\right] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$$\longrightarrow \text{جواب} \quad F_1(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) \;,\; \text{جواب} = \frac{1}{s-2}\left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}\right)$$

Scanned by CamScanner

④ $L^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^3+s}\right] = u_2(t)\, f(t-2)$

$f(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s^3+s}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right]$

$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$, $A=1,\ B=-1,\ C=0$

$= \frac{1}{s} + \frac{-s}{s^2+1} = \frac{s^2+1-s^2}{s(s^2+1)}$

$\rightarrow f(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right) = 1-\cos t$

$\rightarrow$ جواب $= u_2(t)\left(1-\cos(t-2)\right)$

---

④ با کمک لاپلاس حل کنید

$y'' + 4y = \begin{cases} x, & 0<x<1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$

$\underbrace{}_{(u_0(t)-u_1(t))\,t}$ $\longrightarrow$ بر حسب متغیر t

$s^2F(s) + 4F(s) = L[u_0(t)t] - L[u_1(t)t]$

$= \frac{1}{s^2} - e^{-1s}L[t+1] = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)$

$\rightarrow F(s)(s^2+4) = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)$

$\rightarrow F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+4)} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2(s^2+4)} + \frac{1}{s(s^2+4)}\right)$

$\frac{1}{s^2(s^2+4)} = \frac{A}{s^2} + \frac{Bs+C}{s^2+4} = \frac{\frac{1}{4}}{s^2} + \frac{-\frac{1}{4}}{s^2+4}$

~~$\rightarrow y(t) = \frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right)$~~

$\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4} = \frac{\frac{1}{4}}{s} + \frac{-\frac{1}{4}s}{s^2+4}$

Scanned by CamScanner

(V)

$\rightarrow y(t) = \frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right) - u_1(t)\left(\left(\frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right)\right.\right.$

$\left.\left. + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2t)\right)\right|_{t \to t-1}$

$\rightarrow y(t) = \frac{1}{4}\left(t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right) - \frac{u_1(t)}{4}\Big\{$ ~~$\frac{1}{4}(t - 1) - \frac{1}{2}\sin(2$~~

$\Big\{ t-1 - \frac{1}{2}\sin(2(t-1)) + 1 - \frac{1}{4}\cos(2(t-1)) \Big\}$

94 9Λ

Scanned by CamScanner

نمره میان ترم
نمره تحقیق پروژه
نمره پایان ترم
نمره نهایی

به نام خدا

دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج

سوالات امتحانی درس : معادلات دیفرانسیل   نیمسال دوم ۹۶-۹۵ رشته تحصیلی: فنی و مهندسی

استاد: [illegible]   تاریخ امتحان : ۱۳۹۵/۰۳/۱۷   ۸ صبح   مدت پاسخگویی : ۱۰۰ دقیقه

۱. معادلات زیر را حل کنید : (۶ نمره)

1) $y' = \dfrac{y^4 - x^4}{y^4 - 4xy^3}$

2) $y' - 2(\operatorname{tg} x)\, y = \sqrt{y \sin x}$

3) $y' = x^3 (y-x)^2 + \dfrac{y}{x}$; $y_1 = x$

۲. مسیرهای متعامد بر دسته منحنی‌های $y = \dfrac{c - x^2}{c + x^2}$ را پیدا کنید. (۲ نمره)

۳. معادلات زیر را حل کنید : (۴ نمره)

1) $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$

2) $2x^2 y'' + 5x y' + y = 3x + 2$

۴. محاسبه کنید : (۳ نمره)

1) $L^{-1}\left[\dfrac{s}{(s^2+4)^2}\right]$

2) $L\left[(t-3)\cos(3t-9)\, u_3(t)\right]$

۵. اگر $y_1 = x e^{2x}$ جواب خصوصی معادله‌ی زیر باشد، جواب عمومی آن را پیدا کنید : (۲ نمره)

$$x^2 y'' - 2x y' + (2 - 4x^2) y = 0$$

۶. معادله‌ی زیر را به کمک تبدیلات لاپلاس حل کنید : (۳ نمره)

$$y'' + y' = \cos x + \int_0^x \sin(x-\lambda)\, y'(\lambda)\, d\lambda \;;\quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

موفق باشید.

Scanned by CamScanner

$f = xy^4 + x^5 + y^5$

$df = (y^4 + 5x^4)\,dx + (4xy^3 + 5y^4)\,dy = 0$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-(y^4 + 5x^4)}{4xy^3 + 5y^4}$

$y' = -\frac{y^4 + 5x^4}{4xy^3 + 5y^4}$ $\qquad y = vx$

$\rightarrow v'x + v = -\frac{v^4 + 5}{4v^3 + 5v^4} \rightarrow x\frac{dv}{dx} = -v - \frac{v^4 + 5}{4v^3 + 5v^4}$

$= -\left(\frac{4v^4 + 5v^5 + v^4 + 5}{4v^3 + 5v^4}\right) = -\frac{(5v^5 + 5v^4 + 5)}{4v^3 + 5v^4}$

$\rightarrow x\frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{4v^3 + 5v^4}{5(v^5 + v^4 + 1)}\,dv = -5\frac{dx}{x}$

$f = xy^4 - \frac{x^5}{5} - \frac{y^5}{5} \rightarrow df = (y^4 - x^4)\,dx + (4xy^3 - y^4)\,dy$

$\rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y^4 - x^4}{y^4 - 4xy^3}$ $\qquad y = vx$

$v'x + v = \frac{v^4 - 1}{v^4 - 4v^3} \rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v^4 - 1}{v^4 - 4v^3} - v = \frac{v^4 - 1 - v^5 + 4v^4}{v^4 - 4v^3}$

$\rightarrow \frac{v^4 - 4v^3}{5v^4 - v^5 - 1}\,dv = \frac{dx}{x}$

Scanned by CamScanner

page1

$$y' = \frac{y^4 - x^4}{y^4 - 4xy^3} \longrightarrow f(x,y) = xy^4 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{5}y^5 = c$$

$$y' - 2(\operatorname{tg} x)y = \sqrt{y \sin x}, \quad n = 1/2$$

$$n = 1/2, \quad u = y^{1-n} = y^{1-1/2} = y^{1/2} \longrightarrow u' = \frac{1}{2} y' y^{-1/2}$$

$$\frac{1}{2} y^{-1/2}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2} y^{-1/2} y' - \frac{1}{2} y^{-1/2} (2 \operatorname{tg} x) y = \frac{1}{2} y^{-1/2} y^{1/2} \sqrt{\sin x}$$

$$\longrightarrow u' - (\operatorname{tg} x) u = \frac{1}{2} (\sin x)^{1/2}, \quad \mu = e^{\int -\operatorname{tg} x \, dx} = e^{\ln \cos x} = \cos x$$

$$\longrightarrow u = \frac{1}{\mu}\left[\int \mu g \, dx + c\right] = \frac{1}{\cos x}\left[\int \cos x \left(\frac{1}{2}\sin x\right)^{1/2} dx + c\right]$$

$$= \frac{1}{\cos x}\left[\frac{1}{2}\frac{(\sin x)^{3/2}}{3/2} + c\right] = \frac{1}{\cos x}\left[\frac{1}{3}\sin x \sqrt{\sin x} + c\right]$$

$$u = y^{1/2} \longrightarrow y = u^2 = \frac{1}{\cos^2 x}\left[\frac{1}{3}\sin x \sqrt{\sin x} + c\right]^2$$

$$y' = x^3 (y - x)^2 + y/x, \quad y_1 = x$$

$$y = u^{-1} + y_1 = u^{-1} + x \longrightarrow y - x = u^{-1}$$

$$\longrightarrow y' = -u' u^{-2} + 1 \longrightarrow -u' u^{-2} + 1 = x^3 u^{-1} + \frac{u^{-1} + x}{x}$$

$$\longrightarrow -u' u^{-2} = x^3 u^{-1} + \frac{1}{x} u^{-1} \xrightarrow{\;\; \times(-u^2) \;\;}$$

$$\longrightarrow u' = -x^3 u - \frac{1}{x} u \longrightarrow u' = -\left(x^3 + \frac{1}{x}\right) u$$

$$\longrightarrow \frac{du}{dx} = -\left(x^3 + \frac{1}{x}\right) u \longrightarrow \frac{du}{u} = -\left(x^3 + 1/x\right) dx$$

$$\longrightarrow \ln|u| = -\frac{x^4}{4} + \ln|x| + c$$

page62

$y=\frac{c-x^2}{c+x^2}$ مسیرهای متعامد!

$\rightarrow y=\frac{c-x^2}{c+x^2} \rightarrow y(c+x^2)=c-x^2$

$\rightarrow cy+yx^2=c-x^2 \rightarrow cy-c=-x^2-yx^2$

$\rightarrow c(y-1)=-x^2(y+1)$

$\rightarrow c=-\frac{x^2(y+1)}{y-1}=\frac{x^2(y+1)}{1-y} \rightarrow -c=\frac{x^2(y+1)}{y-1}$

$\xrightarrow{\text{مشتق}} 0=\frac{(y-1)(2x(y+1)+y'x^2)-y'x^2(y+1)}{(y-1)^2}$

$\rightarrow (y-1)(2xy+2x+y'x^2)-x^2y'(y+1)=0$

$\rightarrow (y-1)(2x(y+1))+x^2y'(y-1)-x^2y'(y+1)=0$

$\rightarrow 2x(y^2-1)-2x^2y'=0$ معادله دیفرانسیل دسته منحنی

$y' \leftrightarrow -1/y'$

$\rightarrow x(y^2-1)-x^2y'=0$

$\rightarrow x(y^2-1)+x^2/y'=0$

$\rightarrow \frac{dy}{dx}x(y^2-1)+x^2=0$

$\rightarrow (y^2-1)dy+xdx=0 \rightarrow \frac{y^3}{3}-y+\frac{x^2}{2}=C$

۴۷ ج، ۲۰ دسته منحنی

Scanned by CamScanner

Pages 1 $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$

$r^2 - 5r + 6 = 0 \longrightarrow (r-2)(r-3) = 0 \longrightarrow y_1 = e^{2x},\ y_2 = e^{3x}$

$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

$y_p = Ae^{2x} \longrightarrow y_p = Axe^{2x} \longrightarrow y_p' = A\{e^{2x} + 2xe^{2x}\}$

$\longrightarrow y_p' = A(1+2x)e^{2x} \longrightarrow y_p'' = A\{2e^{2x} + 2(1+2x)e^{2x}\}$

$\longrightarrow y_p'' = A(4+4x)e^{2x}$

$\longrightarrow A(4+4x)e^{2x} - 5A(1+2x)e^{2x} + 6Axe^{2x} = e^{2x}$

$\longrightarrow (4A - 5A)e^{2x} = e^{2x} \longrightarrow -A = 1 \longrightarrow A = -1$

$y_p = -xe^{2x} \longrightarrow y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} - xe^{2x}$

page 4

$$2x^2y'' + 5xy' + y = 3x + 2$$

$$2x^2 \longrightarrow 2r(r-1) + 5r + 1 = 0 \longrightarrow 2r^2 + 3r + 1 = 0$$

$$\longrightarrow r^2 + \frac{3}{2}r + \frac{1}{2} = 0 \longrightarrow (r+1)(r+1/2) = 0$$

تفکیک به ۱ یا $\frac{1}{2}$ ، $3/2$ ضرب

$$\longrightarrow r = -1,\ r = -1/2$$

$$\longrightarrow y_1 = x^{-1},\ y_2 = x^{-1/2}$$

$$R(x) = \frac{3x+2}{2x^2} \longrightarrow T = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3x+2}{2x^2} \end{bmatrix}$$

$$W(x^{-1}, x^{-1/2}) = \begin{vmatrix} x^{-1} & x^{-1/2} \\ -x^{-2} & -1/2\, x^{-3/2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}x^{-5/2} + x^{-5/2} = \frac{1}{2}x^{-5/2}$$

$$y_p = l_1y_1 + l_2y_2 \quad , \quad l_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{-1/2} \\ \frac{3x+2}{2x^2} & -\frac{1}{2}x^{-3/2} \end{vmatrix}}{\frac{1}{2}x^{-5/2}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}(3x+2)x^{-5/2}}{\frac{1}{2}x^{-5/2}} = -(3x+2) \longrightarrow l_1 = -3/2\, x^2 - 2x$$

$$l_2' = \frac{\begin{vmatrix} x^{-1} & 0 \\ -x^{-2} & \frac{3x+2}{2x^2} \end{vmatrix}}{\frac{1}{2}x^{-5/2}} = \frac{\frac{1}{2}x^{-3}(3x+2)}{\frac{1}{2}x^{-5/2}} = (3x+2)x^{-1/2}$$

$$\longrightarrow l_2' = 3x^{1/2} + 2x^{-1/2} \longrightarrow l_2 = \frac{3}{3/2}x^{3/2} + \frac{2}{1/2}x^{1/2}$$

$$\longrightarrow l_2 = 2x^{3/2} + 4x^{1/2}$$

Scanned by CamScanner

~~page 6 / page 4~~ page 5

$$y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 = \left(-\frac{3}{2}x^2 - 2x\right)x^{-1} + \left(2x^{3/2} + 4x\right)\ldots$$

$$= -\frac{3}{2}x - 2 + 2x + 4 = \frac{1}{2}x + 2$$

$x = e^z$ ~~$\leftarrow z = \ln x$~~ حل از طریق تبدیل به معادله با ضرایب ثابت:

~~$P_2(r) = r^2 + \frac{3}{2}r + \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{3}{2}$~~

$z = \ln x \longleftrightarrow x = e^z$

$$P_2(r) = 2r^2 + 3r + 1 = 0 \longrightarrow 2\frac{d^2y}{dz^2} + 3\frac{dy}{dz} + y = 3e^z + 2$$

$$\longrightarrow y_1 = e^{-z}, \; y_2 = e^{-1/2 z}$$

~~$y_p = Ae^z + B \longrightarrow y'_p = A, y''$~~ (مشتق نسبت به z)

$$y_p = Ae^z + B \longrightarrow y'_p = Ae^z, \; y''_p = Ae^z$$

$$\longrightarrow 2y''_p + 3y'_p + y_p = 3e^z + 2$$

$$\longrightarrow 2Ae^z + 3Ae^z + Ae^z + B = 3e^z + 2$$

$$\longrightarrow 6Ae^z + B = 3e^z + 2 \longrightarrow \begin{cases} 6A = 3 \longrightarrow A = 1/2 \\ B = 2 \end{cases}$$

$$\longrightarrow y_p = \frac{1}{2}e^z + 2 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow y_p = \frac{1}{2}x + 2$$

Scanned by CamScanner

page6

$$L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+4)^2}\right] = t L^{-1}\left[\int_s^{+\infty} \frac{u}{(u^2+4)^2} du\right]$$

$$= t L^{-1}\left[\frac{+1}{2(u^2+4)}\Big|_s^{+\infty}\right] = t L^{-1}\left(\frac{-1}{2(s^2+4)}\right) = -\frac{1}{4} t \sin(2t)$$

$$L\left[(t-3)\cos(3t-9)\, u_3(t)\right] = e^{-3s} L\left[t \cos 3t\right]$$

$$= -e^{-3s}\left(\frac{s}{s^2+9}\right)' = -e^{-3s}\left(\frac{s^2+9-2s^2}{(s^2+9)^2}\right) = e^{-3s}\left(\frac{s^2-9}{(s^2+9)^2}\right)$$

$$x^2y'' - 2xy' + (2-4x^2)y = 0, \quad y_1 = xe^{2x}$$

$$p(x) = \frac{-2x}{x^2} = \frac{-2}{x}, \quad \int -p(x)\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln|x|$$

$$\rightarrow y_2 = vy_1, \quad v' = \frac{1}{y_1^2} e^{\int -p(x)dx} = \frac{1}{x^2e^{4x}} e^{2\ln|x|}$$

$$\rightarrow v' = \frac{x^2}{x^2e^{4x}} = e^{-4x} \rightarrow v = -\frac{1}{4}e^{-4x}$$

$$\rightarrow y_2 = vy_1 = -\frac{1}{4}e^{-4x}xe^{2x} = -\frac{1}{4}xe^{-2x} \quad y_2$$

Scanned by CamScanner

Page 7

$$y'' + y' = \cos x + \int_0^x \sin(x-\lambda)\, y'(\lambda)\, d\lambda, \quad y(0)=0,\ y'(0)=0$$

$$\longrightarrow y'' + y' = \cos x + (\sin x) * y'(x)$$

$$\xrightarrow{\text{لاپلاس}} s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + sY(s) - y(0) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$+ \frac{1}{s^2+1}\left(sY(s) - y(0)\right) \longrightarrow Y(s)\left(s^2+s\right) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} Y(s)$$

$$\xrightarrow[s^2+1]{\text{ضرب در}} Y(s)\left(s(s+1)\right)(s^2+1) = s + s\,Y(s)$$

$$\longrightarrow Y(s)\left(s(s+1)(s^2+1) - s\right) = s$$

$$\longrightarrow (Y(s))\, s\left((s+1)(s^2+1) - 1\right) = s$$

$$\longrightarrow Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)-1} = \frac{1}{s^3+s+s^2+1-1} = \frac{1}{s^3+s^2+s}$$

$$= \frac{1}{s(s^2+s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+s+1}$$

$$\longrightarrow 1 = A(s^2+s+1) + (Bs+C)s$$

$$s=0 \longrightarrow A=1$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} 0 = A(2s+1) + 2Bs + C$$

$$s=0 \longrightarrow A+C=0 \longrightarrow C=-A=-1$$

$$s=1 \longrightarrow B=-1$$

$$\longrightarrow s^2+s+1 - s^2 - s = 1$$

Scanned by CamScanner

page 8 $\rightarrow X(s) = \dfrac{1}{s} + \dfrac{-s-1}{s^2+s+1}$

$$\rightarrow y(t) = 1 - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2+s+1}\right]$$

$$= 1 - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+1/2)+1/2}{(s+1/2)^2+3/4}\right]$$

$$= 1 - e^{-1/2t}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1/2}{s^2+3/4}\right]\right\}$$

$$= 1 - e^{-1/2t}\left\{\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{2}\Big/\frac{\sqrt{3}}{2}\,\sin\left(\sqrt{3}/2\,t\right)\right\}$$

$$= 1 - e^{-1/2t}\left\{\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right\}$$

۱۰،۲،۹۴ ساعت ۱۲ شب

Scanned by CamScanner

به نام خدا

دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج

نمره میان ترم	
نمره تحقیق پروژه	
نمره پایان ترم	
نمره نهایی	

سوالات امتحانی درس معادلات دیفرانسیل — استاد طلیعه استاد نیک — نیمسال دوم ۹۴-۹۳

نام و نام خانوادگی — رشته تحصیلی فنی — شماره دانشجویی

تاریخ امتحان ۱۳۹۴/۳/۱۸ — شماره صندلی — مدت پاسخگویی ′۱۲۰

نمره تجدیدنظرشده:

۱۰/۵

۱. هر یک از معادلات زیر را حل کنید: (۵ نمره)

۱) $y' = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$ ۲) $(2xy + 2x^2y^3)y' = 1$ ۳) $y' = xy + y^4$

۲. نشان دهید معادله زیر عامل انتگرال‌سازی به شکل $\mu = \mu(y^2 - x^2)$ دارد و سپس آن را حل کنید: (۲ نمره)

$$(x^2 + y^2 + 1)\,dx - 2xy\,dy = 0$$

۳. معادلات زیر را حل کنید: (۵ نمره)

۱) $yy'' = 2y'^2$ ۲) $y'' - 4y' = 3x^2 + e^{2x}$ ۳) $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$

۴. معادله زیر را حل کنید: (۲ نمره)

$$x^2y'' + 3xy' + 2y = x\ln x$$

۵. تبدیلات زیر را پیدا کنید: (۳ نمره)

$$\mathcal{L}\left(U_\pi(x)\cos 2x + \int_0^x e^{-t}\frac{\sin t}{t}\,dt\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-s}\,\mathrm{Arctg}\frac{1}{s} + \frac{1}{s(s+1)}\right)$$

۶. معادله زیر را حل کنید: (۳ نمره)

$$y(t) - e^{t} = \int_0^t y(t)\,e^{t-x}\,dx$$

موفق باشید

Scanned by CamScanner

به نام خدا

دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج

نمره میان ترم	
نمره تحقیق پروژه	
نمره پایان ترم	
نمره نهایی	

سوالات امتحانی درس معادلات دیفرانسیل — استاد حلیمه اسکندری — نیمسال دوم ۹۴-۹۳

نام و نام خانوادگی — رشته تحصیلی — شماره دانشجویی

تاریخ امتحان ۱۳۹۴/۳/۱۸ — شماره صندلی — مدت پاسخگویی '۱۲۰

۸ ص

نمره تجدیدنظرشده:

۱. معادلات زیر را حل کنید: (۵ نمره)

۱) $y' = \dfrac{y^2 + 2xy}{x^2}$ ۲) $y'\sin x + y\cos x = x^2 + 1$ ۳) $y = (y')^2 + 2(y')^4$

۲. برای معادله زیر یک عامل انتگرال ساز به فرم $\mu = x^{\alpha} y^{\beta}$ پیدا کنید و سپس آن را حل کنید. (۲ نمره)

$$\left(y + \frac{y^2}{5x}\right)dx + (2x + y)\,dy = 0$$

۳. معادلات زیر را حل کنید: (۵ نمره)

۱) $xy'' + y' = 1$ $(x>0)$ ۲) $y''' + 4y'' - y' - 4y = 2e^{x}$ ۳) $y'' + y = \sec x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

۴. معادله زیر را حل کنید: (۲ نمره)

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = (\ln x)^3$$

۵. تبدیلات زیر را پیدا کنید: (۲ نمره)

۱) $\mathcal{L}\left(t^3 e^{-2t} \sin\sqrt{2}\,t\right)$ ۲) $\mathcal{L}^{-1}\left(\ln\left(\dfrac{s^2+4}{s^2-5}\right)\right)$

۶. معادله‌ی انتگرال زیر را حل کنید: (۲ نمره)

$$y' - 2y - 3\int_0^x y(t)\,dt = 8u_2(x) \qquad y(0) = 0$$

۷. دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x' = 2x - 3y & x(0) = 8 \\ y' = y - 2x & y(0) = 3 \end{cases}$$

موفق باشید.

Scanned by CamScanner

$$y'' + (2\tan x)y' + \frac{2}{\cos^2 x}y = 0 \quad , \quad y_1 = \cos^2 x$$

مسئله شکل

$p(x) = 2\tan x$, $\int -p(x)\,dx = \int -\frac{2\sin x}{\cos x}\,dx = 2\ln|\cos x| = \ln \cos^2 x$

$\longrightarrow y_2 = v y_1 \quad v' = \frac{1}{y_1^2} e^{\int -p(x)\,dx} = \frac{1}{\cos^4 x} e^{\ln \cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^4 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\longrightarrow v' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \longrightarrow v = \int \sec^2 x\,dx = \tan x$

$\longrightarrow y_2 = v y_1 = \tan x \cos^2 x = \sin x \cos x$

$\longrightarrow \begin{cases} y_1 = \cos^2 x \\ y_2 = \sin x \cos x \end{cases}$ $\quad \frac{1}{2}\sin 2x$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \cos^2 x & \sin x \cos x \\ -2\sin x \cos x & \cos 2x \end{vmatrix} = \cos^2 x \cos 2x + (\sin x \cos x)^2$$

$= \cos^2 x(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin^2 x \cos^2 x$

$= \cos^4 x$

y_2

$\begin{cases} 4x^2y'' + 4x(x-1)y' + (3-2x)y = 0 \\ y_1 = \sqrt{x} \\ y_2 = -\sqrt{x}e^{-x} \end{cases}$ $, v = -e^{-x}$

۹۸/۸/۲۰

سوال
جواب عمومی معادله زیر را بیابید

$$y'' + (2\tan x)y' + \frac{2}{\cos^2 x}y = \cos^2 x$$

مسئله شکل

$y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2$

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \cos x \\ \cos^2 x & \cos^2 x - \sin^2 x \end{vmatrix}}{\cos^4 x} = \frac{-\sin x \cos^3 x}{\cos^4 x} = \frac{-\sin x}{\cos x}$$

$\longrightarrow c_1 = \ln \cos x$

Scanned by CamScanner

$$y'' + 2y' + y = 4e^{-x}\ln x$$

$$P_2(r) = r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 = 0 \rightarrow r = -1$$

$$y_1 = e^{rx} = e^{-x}$$
$$y_2 = x y_1 = x e^{-x}$$

$$\rightarrow W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{-x} & x e^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)e^{-2x} + x e^{-2x} = e^{-2x}$$

$$y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x e^{-x} \\ 4e^{-x}\ln x & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix}}{e^{-2x}} = \frac{-4x \ln x\, e^{-2x}}{e^{-2x}}$$

$$= -4x \ln x$$

$$\rightarrow c_1 = \int -4x \ln x \, dx = -4 \left\{ \int x \ln x \, dx \right\}$$

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2$$

$$\rightarrow c_1 = -4 \left\{ \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 \right\} = -2x^2 \ln x + x^2$$
$$= x^2 (1 - 2\ln x)$$

$$c_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & 4e^{-x}\ln x \end{vmatrix}}{e^{-2x}} = \frac{4e^{-2x}\ln x}{e^{-2x}} = 4\ln x$$

$$\rightarrow c_2 = \int 4\ln x \, dx = 4 \left\{ x \ln x - x \right\} = 4x(\ln x - 1)$$

$$y_p = x^2(1 - 2\ln x)e^{-x} + 4x(\ln x - 1)\, x e^{-x}$$
$$= e^{-x} \left\{ x^2 - 2x^2 \ln x + 4x^2 \ln x - 4x \right\}$$
$$= e^{-x} \left\{ x^2 - 4x + 2x^2 \ln x \right\}$$

Scanned by CamScanner

مسئله حل

$$y(4x+3y^3)\,dx + x(2x+5y^3)\,dy = 0$$

$$x^{\alpha}y^{\beta}\left\{ y(4x+3y^3)\,dx + x(2x+5y^3)\,dy \right\} = 0$$

$$\rightarrow \underbrace{(4x^{\alpha+1}y^{\beta+1} + 3x^{\alpha}y^{\beta+4})}_{P}\,dx + \underbrace{(2x^{\alpha+2}y^{\beta} + 5x^{\alpha+1}y^{\beta+3})}_{Q}\,dy = 0$$

$$Q_x = P_y \rightarrow 2(\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta} + 5(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+3}$$

$$= 4(\beta+1)x^{\alpha+1}y^{\beta} + 3(\beta+4)x^{\alpha}y^{\beta+3}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2(\alpha+2) = 4(\beta+1) \\ 5(\alpha+1) = 3(\beta+4) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\alpha+4 = 4\beta+4 \\ 5\alpha+5 = 3\beta+12 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2\alpha-4\beta = 0 \rightarrow \alpha = 2\beta \\ 5\alpha-3\beta = 7 \end{cases} \rightarrow 5(2\beta)-3\beta = 7$$

$$\rightarrow 7\beta = 7 \rightarrow \beta = 1$$

$$\rightarrow \alpha = 2$$

$$\rightarrow \mu = x^{\alpha}y^{\beta} = x^2y$$

$$\xrightarrow{\alpha=2,\ \beta=1} (4x^3y^2 + 3x^2y^5)\,dx + (2x^4y + 5x^3y^4)\,dy = 0$$

$$f(x,y) = \int (4x^3y^2 + 3x^2y^5)\,dx + 0 = x^4y^2 + x^3y^5 = c$$

جواب

Scanned by CamScanner

روش تغییر پارامترها ،

$$R(x) = \frac{4x^6}{x^2} = 4x^4$$

$$W(x^2, x^{-2}) = \begin{vmatrix} x^2 & x^{-2} \\ 2x & -2x^{-3} \end{vmatrix} = -2x^{-1} - 2x^{-1} = -4x^{-1}$$

$$\rightarrow y_p = l_1 y_1 + l_2 y_2 , \quad y_1 = x^2 , \; y_2 = x^{-2}$$

$$l_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{-2} \\ 4x^4 & -2x^{-3} \end{vmatrix}}{-4x^{-1}} = \frac{-4x^2}{-4x^{-1}} = x^3$$

$$\rightarrow l_1 = x^4/4$$

$$l_2' = \frac{\begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 4x^4 \end{vmatrix}}{-4x^{-1}} = \frac{4x^6}{-4x^{-1}} = -x^7$$

$$\rightarrow l_2 = -\frac{x^8}{8} \rightarrow y_p = l_1 y_1 + l_2 y_2 = x^2 (x^4/4) + x^{-2} \left(\frac{-x^8}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{4} x^6 - \frac{1}{8} x^6 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) x^6 = \frac{1}{8} x^6$$

برنولی (مهم)

$$(2x^2 y \ln y - x) y' = y \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x^2 y \ln y - x} \quad ۹۵, ۳, ۲۰$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{2x^2 y \ln y - x}{y} = 2x^2 \ln y - \frac{1}{y} x$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y} x = 2x^2 \ln y}$$ برنولی

$$y' + \frac{1}{x} y = (2 \ln x) y^2$$

$$u = y^{1-2} = y^{-1}$$

$$u' = -y' y^{-2}$$

$$\rightarrow -y' y^{-2} + \frac{1}{x} y (-y^{-2}) = (2 \ln x) y^2 (-y^{-2})$$

$$\rightarrow u' - \frac{1}{x} u = -2 \ln x \rightarrow \mu = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = \frac{1}{x}$$

$$\rightarrow u = x \left[\int \frac{1}{x} (-2 \ln x) dx + c \right] = x \left[-\frac{2 (\ln x)^2}{2} + c \right] = x (-(\ln x)^2 + c)$$

Scanned by CamScanner

$x^2y'' + xy' - 4y = 4x^6$ $\quad x^2y'' + xy' - 4y = 4x^6$

اصل سوال

$P_2(r) = r(r-1) + r - 4 = r^2 - 4 = 0 \rightarrow r = \pm 2$

$\rightarrow \begin{cases} y_1 = x^r = x^2 \\ y_2 = x^r = x^{-2} \end{cases}$

$z = \ln x \rightarrow \dfrac{d^2y}{dz^2} - 4y = 4(e^z)^6 = 4e^{6z}$

$\rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{rz} = e^{2z} \\ y_2 = e^{rz} = e^{-2z} \end{cases}$

$y_p = Ae^{6z} \rightarrow y'_p = 6Ae^{6z} \rightarrow y''_p = 36Ae^{6z}$

$\rightarrow y''_p - 4y_p = 4e^{6z}$

$\rightarrow 36Ae^{6z} - 4(Ae^{6z}) = 4e^{6z}$

$\rightarrow (36A - 4A)e^{6z} = 4e^{6z}$

$\rightarrow 32A = 4 \rightarrow A = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$

$\rightarrow y_p = \dfrac{1}{8}e^{6z} \rightarrow \dfrac{1}{8}x^6 = y_p$

$y = c_1x^2 + c_2x^{-2} + \dfrac{1}{8}x^6$

Scanned by CamScanner

$\to \ell_1 = \int x e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} = -(x+1)e^{-x}$

مشتق	انتگرال
x +	e^{-x}
1 −	$-e^{-x}$
0	e^{-x}

$\to \ell_1 = -(x+1)e^{-x}$

$$\ell_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & x+1 \end{vmatrix}}{e^x\left(\frac{x+1}{x^2}\right)} = \frac{(x+1)e^x}{(x+1)e^x \cdot x^{-2}} = x^2$$

$\to \ell_2 = \int x^2 dx = x^3/3$

$$\to y_p = \ell_1 y_1 + \ell_2 y_2 = -(x+1)e^{-x}\cdot e^{x} + x^3/3 \cdot \frac{-1}{x}$$
$$= -x - 1 - \frac{1}{2}x^2 = -\left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right)$$

صورت سوال

$$\int_0^t y''(x)\, y'(t-x)\, dx = y'(t) - y(t), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$\to y'' * y'(t) = y'(t) - y(t)$

$\xrightarrow{\text{لاپلاس}} L[y''(t)]L[y'(t)] = L[y'(t)] - L[y(t)]$

$\to (s^2 Y(s) - s y'(0) - y(0))(sY(s) - y(0)) = sY(s) - y(0) - Y(s)$

$\to (s^2 Y(s))(sY(s)) = sY(s)$

$\to s^3 (Y(s))^2 = sY(s) \to Y(s) = \frac{1}{s^2}$

$\to y(t) = t$

Scanned by CamScanner

$\longrightarrow \int -p(x)\,dx = x - 2\ln|x| + \ln|x+1|$

$\longrightarrow y_2 = v y_1 \;,\; v' = \frac{1}{y_1^2} e^{\int -p(x)dx}$

$\longrightarrow v' = \frac{1}{(e^x)^2} e^{x - 2\ln|x| + \ln|x+1|} = e^{-2x} \cdot e^{x} \cdot e^{\ln|x|^{-2}} \cdot e^{\ln|x+1|}$

$\xrightarrow{x>1} = e^{-x} x^{-2}(x+1) = \frac{x+1}{x^2} e^{-x}$

$\longrightarrow v = \int \frac{x+1}{x^2} e^{-x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) e^{-x}\,dx = \int \left(-\frac{1}{x} e^{-x}\right)' dx$

$= -\frac{1}{x} e^{-x} \longrightarrow y_2 = v y_1 = -\frac{1}{x} e^{-x} \cdot e^{x} = -\frac{1}{x}$

$$\begin{cases} y_1 = e^x \\ y_2 = \frac{-1}{x} \end{cases}$$

$\longrightarrow (x^2+x) y'' + (2-x^2) y' - (2+x) y = x(x+1)^2$

$\longrightarrow y'' + \frac{2-x^2}{x^2+x} y' - \frac{2+x}{x^2+x} y = \frac{x(x+1)^2}{x^2+x} = \frac{x+1}{1}$

$R(x) = x+1$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & \frac{-1}{x} \\ e^x & \frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = e^x/x^2 + \frac{e^x}{x} = e^x\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)$$

$$y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 \;,\; c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{x} \\ x+1 & \frac{1}{x^2} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{\frac{x+1}{x}}{e^x\left(\frac{1+x}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{x+1}{x} \times \frac{x^2}{x+1} e^{-x} = x e^{-x} \longrightarrow c_1 = \int x e^{-x}\,dx$$

Scanned by CamScanner

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=-3\\ \beta=-4\end{array}\right\} \to (x^{-2}y^{-1}+4x^{-3}y^{-3})\,dx+(x^{-1}y^{-2}+6x^{-2}y^{-4})\,dy=0$$

$P=f_x \qquad Q=f_y$

$$Q_x=-x^{-2}y^{-2}-12x^{-3}y^{-4}=P_y=-x^{-2}y^{-2}-12x^{-3}y^{-4}$$

$$\to f(x,y)=\int (x^{-2}y^{-1}+4x^{-3}y^{-3})\,dx+h(y)$$

$$=-x^{-1}y^{-1}-2x^{-2}y^{-3}+h(y) \quad , h(y)=0$$

$$\to f(x,y)=-x^{-1}y^{-1}-2x^{-2}y^{-3}=C$$

$$\to x^{-1}y^{-1}+2x^{-2}y^{-3}=c$$

جواب

$$\xrightarrow{\times x^2y^3} xy^2+2=cx^2y^3 \to xy^2-cx^2y^3=-2$$

$$(x^2+x)y''+(2-x^2)y'-(2+x)y=x(x+1)^2 \quad , y_1=e^x$$

$$(x^2+x)y''+(2-x^2)y'-(2+x)y=0$$

$$\to p(x)=\frac{2-x^2}{x^2+x} \to \int -p(x)\,dx=\int\frac{x^2-2}{x^2+x}\,dx$$

$$=\int\frac{x^2+x-2-x}{x^2+x}\,dx=\int\left(1+\frac{-x-2}{x^2+x}\right)dx=x-\int\frac{x+2}{x(x+1)}\,dx$$

$$\frac{x+2}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1} \quad , A=2, B=-1$$

$$\to \int\frac{x+2}{x(x+1)}\,dx=\int\frac{2}{x}\,dx-\int\frac{dx}{x+1}=2\ln|x|-\ln|x+1|$$

Scanned by CamScanner

$$y' = x^3 (y-x)^2 + y/x \,, \quad y_1 = x$$

ریکاتی

$$y = u^{-1} + y_1 = u^{-1} + x$$

$$\longrightarrow y' = -u'u^{-2} + 1$$

$$\longrightarrow -u'u^{-2} + 1 = x^3 (u^{-1})^2 + \frac{u^{-1} + x}{x}$$

$$\longrightarrow -u'u^{-2} + 1 = x^3 u^{-2} + u^{-1}/x + 1$$

$$\longrightarrow -u'u^{-2} = x^3 u^{-2} + \frac{u^{-1}}{x}$$

u^2 در

$$\longrightarrow -u' = x^3 + \frac{1}{x} u$$

$$\longrightarrow \boxed{u' + \frac{1}{x} u = -x^3} \longrightarrow u' + \frac{1}{x} u = -x^3$$

خطی مرتبه اول

$$\mu = x^\alpha y^\beta \longrightarrow x^\alpha y^\beta \{ (xy^3 + 4y)\,dx + (x^2y^2 + 6x)\,dy \} = 0$$

$$\Longrightarrow \underbrace{(x^{\alpha+1} y^{\beta+3} + 4x^\alpha y^{\beta+1})}_{P}\,dx + (\underbrace{x^{\alpha+2} y^{\beta+2} + 6x^{\alpha+1} y^\beta}_{Q})\,dy = 0$$

$$\Delta = 0 \longrightarrow Q_x = P_y \longrightarrow 6(\alpha+1) x^\alpha y^\beta + (\alpha+2) x^{\alpha+1} y^{\beta+2}$$

$$= (\beta+3) x^{\alpha+1} y^{\beta+2} + 4(\beta+1) x^\alpha y^\beta$$

$$\longrightarrow \begin{cases} 6(\alpha+1) = 4(\beta+1) \\ \alpha+2 = \beta+3 \end{cases} \xrightarrow{\;-2\times\;} \begin{cases} 3\alpha - 2\beta = -1 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3\alpha - 2\beta = -1 \\ -2\alpha + 2\beta = -2 \end{cases}$$

$$\alpha = -3$$

$$\beta = -4$$

$$\longrightarrow \mu = x^{-3} y^{-4}$$

Scanned by CamScanner

$$\left(y^3+y^2\sqrt{x^2+y^2}\right)dx - \left(xy\sqrt{x^2+y^2}\right)dy = 0$$ مسئله

تقسیم بر x^3

$$\rightarrow \left\{\left(\frac{y}{x}\right)^3 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right\}dx - \frac{y}{x}\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,dy = 0$$

$$\frac{y}{x} = v \rightarrow y = vx \rightarrow dy = x\,dv + v\,dx$$

$$\rightarrow \left(v^3+v^2\sqrt{1+v^2}\right)dx - v\sqrt{1+v^2}\left(x\,dv+v\,dx\right) = 0$$

$$\rightarrow \left(v^3+v^2\sqrt{1+v^2}-v^2\sqrt{1+v^2}\right)dx + xv\sqrt{1+v^2}\,dv = 0$$

$$\rightarrow v^3\,dx + xv\sqrt{1+v^2}\,dv = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3+y^2\sqrt{x^2+y^2}}{xy\sqrt{x^2+y^2}}$$

تقسیم بر x^3

$$\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^3+\left(\frac{y}{x}\right)^2\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\left(\frac{y}{x}\right)\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}$$

$$\rightarrow \frac{dx}{x} + v^{-2}\sqrt{1+v^2}\,dv = 0$$

$$\rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{\sqrt{1+v^2}}{v^2}\,dv = 0$$

$$\rightarrow \int\frac{dx}{x} + \int\frac{\sqrt{1+v^2}}{v^2}\,dv = C$$ → حل

$$I = \int\frac{\sqrt{1+v^2}}{v^2}\,dv, \quad v = \tan\theta \rightarrow dv = \sec^2\theta\,d\theta$$

$$\rightarrow I = \int\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan^2\theta}\sec^2\theta\,d\theta = \int\frac{\sec^3\theta}{\tan^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int\frac{1}{\cos^3\theta}\cdot\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta = \int\frac{d\theta}{\sin^2\theta\cos\theta}, \quad u = \sin\theta$$

$$du = \cos\theta\,d\theta \rightarrow d\theta = \frac{du}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow I = \int\frac{du}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = \int\frac{du}{u^2(1-u^2)}$$

$$= \int\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{1-u^2}\right)du = ~~-\frac{1}{u} - \frac{1}{2}\ln~~ \frac{1-u}{1+u}$$

$$= -\frac{1}{u} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|$$

Scanned by CamScanner

اکرم سادات لاکنوازش

۱۴۵۸/۳/۲۴

دانشگاه آزاد کرج

Scanned by CamScanner

به نام خدا

دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج

سوالات امتحانی درس : معادلات دیفرانسیل استاد : کلیه اساتید نیمسال دوم ۹۸– ۹۷ نام و نام خانوادگی: رشته تحصیلی : فنی مهندسی

شماره دانشجویی: تاریخ امتحان ۲۶ / ۳ / ۱۳۹۸ ۸ صبح شماره صندلی مدت پاسخگویی ۱۲۰ دقیقه

۱- معادلات مرتبه اول زیر را حل کنید: ۴ نمره

۱) $y' - 2ye^{x} = 4\sqrt{ye^{2x}}$ ۲) $2xy\,Ln\,y\,dx + (x^{2} + y^{2}\sqrt{y^{2}+1})dy = 0$

۲- مسیرهای قایم بر دسته منحنی های زیر پیدا را کنید.۳ نمره

$x^{2} + y^{2} = 2xc$

۳- معادلات زیر را حل کنید . ۴ نمره

۱) $y^{(4)} - y'' - 6y = x$ ۲) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^{x}}{x^{2}+1}$

۴- اگر $y_1 = x$ جواب خصوصی معادله $x^{2}(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$ باشد جواب عمومی آنرا پیدا کنید.۲نمره

۵- تبدیلات زیر را پیدا کنید.۳ نمره

h) $L\left\{e^{-5x}\int_{0}^{x} e^{-t}\dfrac{1-e^{t}}{t}dt\right\}$ i) $L^{-1}\left\{\dfrac{s+4}{s^{2}(s^{2}-3s+2)} + e^{-\pi s}Ln\left(\dfrac{s-1}{s-2}\right)\right\}$

۶- معادله ی $\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases} \\ y(0) = 0 \quad , y'(0) = 0 \end{cases}$ را حل کنید.۲ نمره

۷- معادله انتگرال زیر را حل کنید: ۲نمره

$$y = x + 2\int_{0}^{x}\big((x-t) - \sin(x-t)\big)\,y(t)\,dt$$

موفق باشید

Scanned by CamScanner

$y' - 2ye^x = 4\sqrt{ye^{2x}}$

$y' - 2e^x y = 4y^{1/2} e^x$ برنولی

$n = 1/2$

$u = y^{1-n} = y^{1-1/2} = y^{1/2} \longrightarrow u' = \frac{1}{2} y' y^{-1/2}$

$\frac{1}{2} y^{-1/2} \{ y' - 2ye^x \} = \frac{1(4)}{2} y^{-1/2} y^{1/2} e^x$

$\longrightarrow u' - e^x u = 2e^x$

$p(x) = -e^x$

$\mu = e^{\int -e^x dx} = e^{-e^x}$

$u = \frac{1}{e^{-e^x}} \left[\int 2e^x \cdot e^{-e^x} dx + c \right] = e^{e^x} \left[-2e^{-e^x} + c \right]$

$= -2 + ce^{e^x}$

$\underbrace{2xy \ln y}_{P} dx + (\underbrace{x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}}_{Q}) dy = 0$

$\Delta = Q_x - P_y = 2x - 2x\{\ln y + 1\} = -2x \ln y$

$\frac{\Delta}{P} = \frac{-2x\ln y}{2xy\ln y} = \frac{-1}{y} \longrightarrow \mu = e^{\int \frac{-1}{y} dy} = e^{-\ln y} = \frac{1}{y}$

$\longrightarrow \frac{1}{y} \{ 2xy \ln y \, dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}) dy \} = 0$

$\longrightarrow 2x \ln y \, dx + \left(\frac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2+1} \right) dy = 0$

Scanned by CamScanner

$\rightarrow 2x\ln y\,dx + \left(\frac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2+1}\right)dy = 0$

معادله کامل

$f(x,y) = x^2\ln y + \frac{1}{2}\,\frac{(y^2+1)^{3/2}}{3/2} = c$

$\rightarrow f(x,y) = x^2\ln y + \frac{1}{3}(y^2+1)\sqrt{y^2+1} = c$

مسیر قائم

جواب $\Leftarrow x^2+y^2 = 2cx$

$x^2+y^2 = 2cy$

$y^{(4)} - y'' - 6y = x \xrightarrow{\text{حل همگن}} y^{(4)} - y'' - 6y = 0$

$P_4(r) = r^4 - r^2 - 6 = (r^2-3)(r^2+2) = 0$

$\rightarrow \begin{cases} r = \pm\sqrt{3} \rightarrow y_1 = e^{\sqrt{3}x}, \quad y_2 = e^{-\sqrt{3}x} \\ r = \pm\sqrt{2}i \quad y_3 = \cos(\sqrt{2}x), \quad y_4 = \sin(\sqrt{2}x) \end{cases}$

$y_p = Ax + B \rightarrow -6(Ax+B) = x \rightarrow B = 0$

$A = -1/6$

Scanned by CamScanner

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$$

$$y'' - 2y' + y = 0 \rightarrow r^2 - 2r + 1 = 0$$

$$\rightarrow (r-1)^2 = 0 \longrightarrow r = 1$$ دوبار

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = xe^x$$

$$y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad W(e^x, xe^x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix} = (x+1)e^{2x} - xe^{2x} = e^{2x}$$

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \frac{e^x}{x^2+1} & (x+1)e^x \end{vmatrix}}{e^{2x}} = \frac{xe^{2x}/(x^2+1)}{e^{2x}} = \frac{x}{x^2+1} \rightarrow c_1 = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

$$c_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{x^2+1} \end{vmatrix}}{e^{2x}} = \frac{\frac{e^{2x}}{x^2+1}}{e^{2x}} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\rightarrow c_2 = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x$$

$$y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\cdot e^x + (xe^x)\operatorname{arctg} x$$

Scanned by CamScanner

$x^2(\ln x-1)y'' - xy' + y = 0$, $y_1 = x$

$P(x) = \dfrac{-x}{x^2(\ln x-1)} = \dfrac{-1}{x(\ln x-1)}$

$\int -P(x)\,dx = \int \dfrac{1}{x(\ln x-1)}\,dx = \ln(\ln x-1)$

$y_2 = v y_1$

$v' = \dfrac{1}{y_1^2} e^{\int -P(x)dx} = \dfrac{1}{x^2} e^{\ln(\ln x-1)} = \dfrac{\ln x-1}{x^2}$

$v = \int \dfrac{1}{x^2}(\ln x-1)\,dx = fg - \int g' f\,dx$

f' $\quad g$

$= \dfrac{-1}{x}(\ln x-1) - \int \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{-1}{x}\,dx$

$= \dfrac{1-\ln x}{x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{-\ln x}{x}$

$y_2 = v y_1 = -\dfrac{1}{x}\ln x \cdot x = -\ln x$

$\ln x - 1 + 1 - \ln x$

~~$(\ln x)^2 y'' - x\ln x\, y' + \ldots [illegible] \ldots y = 1/x$~~

~~$y_1 = x$, $P(x) = \dfrac{-x\ln x}{x^2 \ln x} = \dfrac{-1}{x}$ → $v' = \dfrac{1}{x^2} e^{\int \frac{1}{x}dx} = \dfrac{-1}{x^3}$~~

~~$-P(x) = \dfrac{1}{x}$~~

۱۳۹۹/۲/۱۴

$\begin{cases} x^2(\ln x-1)y'' - xy' + y = (\ln x-1)^2 x^2 , \quad x > e \\ y_1 = x \end{cases}$

$W(y_1, y_2) = \ln x - 1$

$u_1' = \ln x \rightarrow u_1 = \int \ln x\,dx = x(\ln x-1)$

$u_2' = x \rightarrow u_2 = x^2/2$

Scanned by CamScanner

$$L\left[e^{-5x}\underbrace{\int_0^x e^{-t}\frac{1-e^{t}}{t}\,dt}_{f(t)}\right] = F_1(s+5)$$

$$F_1(s) = L\left[\int_0^x e^{-t}\frac{1-e^{t}}{t}\,dt\right] = \frac{F_2(s)}{s}$$

$$F_2(s) = L\left[e^{-t}\frac{1-e^{t}}{t}\right] = L\left[\frac{e^{-t}-1}{t}\right] = \int_s^{+\infty} L\left[e^{-t}-1\right]du$$

$$= \int_s^{+\infty}\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u}\right)du$$

$$= \ln\left(\frac{u+1}{u}\right)\Big|_s^{+\infty} = -\ln\left(\frac{s+1}{s}\right) = \ln\left(\frac{s}{s+1}\right)$$

$$= \frac{1}{s}\ln\left(\frac{s}{s+1}\right)\Big|_{s\to s+5} = \frac{1}{s+5}\ln\left(\frac{s+5}{s+6}\right)$$

$$L^{-1}\left[\frac{s+4}{s^2(s^2-3s+2)} + e^{-\pi s}\ln\left(\frac{s-1}{s-2}\right)\right]$$

$$\frac{s+4}{s^2(s^2-3s+2)} = \frac{s+4}{s^2(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s-2}$$

$A = \frac{7}{2}$, $B = 2$, $C = -5$, $D = \frac{3}{2}$

$$L^{-1}\left[\frac{s+4}{s^2(s^2-3s+2)}\right] = A + Bt + Ce^{t} + De^{+2t}$$

$$= \frac{7}{2} + 2t + (-5)e^{t} + \frac{3}{2}e^{2t}$$

Scanned by CamScanner

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-\pi s}\ln\left(\frac{s-1}{s-2}\right)\right] = u_a(t) f(t-a),\ a=\pi$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\ln\left(\frac{s-1}{s-2}\right)\right] \quad , \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-as}F(s)\right] = u_a(t) f(t-a)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{-1}{t}\mathcal{L}^{-1}[F'(s)]$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\ln(s-1)-\ln(s-2)] = \frac{-1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s-2}\right]$$

$$= \frac{-1}{t}\{e^{t}-e^{2t}\}$$

$$\rightarrow = u_\pi(t) f(t-\pi) = u_\pi(t)\left(\frac{-1}{t-\pi}\left(e^{t-\pi}-e^{2(t-\pi)}\right)\right)$$

$$y''-5y'+6y = \begin{cases} 1 & , 0\le x \le 2 \\ 0 & , x>2 \end{cases}$$

معادل

$$y(0)=y'(0)=0$$

راه‌حل شد

$$y''-5y'+6y = (u_0(t)-u_2(t))\,1$$

$$\rightarrow s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) - 5(sY(s)-y(0)) + 6Y(s)$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-2s} \rightarrow (s^2-5s+6)\,Y(s) = \frac{1}{s}(1-e^{-2s})$$

$$\rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2-5s+6}\cdot\frac{1}{s}(1-e^{-2s}) \rightarrow$$ راه‌حل

$$\frac{1}{s(s^2-5s+6)} = \frac{-\frac{1}{2}}{s-2} + \frac{\frac{1}{3}}{s-3} + \frac{\frac{1}{6}}{s} \rightarrow y(t) = -\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{3t}+\frac{1}{6}$$

$$+ u_2(t)\left(-\frac{1}{2}e^{2(t-2)}+\frac{1}{3}e^{3(t-2)}+\frac{1}{6}\right)$$

Scanned by CamScanner

$$y = x + 2\int_0^x \big((x-t) - \sin(x-t)\big)\, y(t)\, dt$$

$(x - \sin x) * y(x)$ (x * y)

$$\mathcal{L}: \quad Y(s) = \frac{1}{s^2} + 2\,\mathcal{L}[x - \sin x]\,\mathcal{L}[y] \qquad \boxed{\mathcal{L}[x] = \frac{1}{s^2}}$$

$$\longrightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2} + 2\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right] Y(s)$$

$$\longrightarrow Y(s)\left(1 - \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s^2}$$

ضرب در s^2

$$\longrightarrow Y(s)\left(s^2 - 2 + \frac{2s^2}{s^2+1}\right) = 1$$

ضرب در s^2+1

$$\longrightarrow Y(s)\left((s^2+1)(s^2-2) + 2s^2\right) = s^2+1$$

$$\longrightarrow Y(s) = \frac{s^2+1}{(s^2+1)(s^2-2) + 2s^2}$$

$$= \frac{s^2+1}{s^4 - 2s^2 + s^2 - 2 + 2s^2}$$

$$= \frac{s^2+1}{s^4 + s^2 - 2} = \frac{s^2+1}{(s^2-1)(s^2+2)}$$

$$= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+2} = \frac{2/3}{s^2-1} + \frac{1/3}{s^2+2}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}}{s^2-1} + \frac{1/3}{s^2+2} \longrightarrow y(t) = \frac{2}{3}\sinh(t) + \frac{1}{3\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}\,t)$$

۲/۱۵ شریف سادات ۱۰۹۸۱۳۲۰۱۲۷

جواب حاصله چک شد درسته

Scanned by CamScanner

با تشکر فراوان از استاد ارژنگ

به پایان این مجموعه از درس معادلات دیفرانسیل رسیدیم

Scanned by CamScanner